N° d'ordre : 418 Année 1970

# THÈSE

*présentée*

à l'Université Paul Sabatier de Toulouse

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

**P. AZEMA**

Ingénieur E N S E E H T
Docteur-Ingénieur

---

# CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE DE FONCTIONS LOGIQUES A L'AIDE D'ÉLÉMENTS A SEUIL

*Soutenue le 15 décembre 1970 devant la Commission d'Examen :*

| | | |
|---|---|---|
| MM. J. LAGASSE | | *Président* |
| Y. SEVELY<br>G. GRATELOUP | } | *Examinateurs* |
| J. KUNTZMAN<br>C. DURANTE | } | *Invités* |

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41536510_0001

N° d'ordre : 418 Année 1970

# THÈSE

*présentée*

à l'Université Paul Sabatier de Toulouse

en vue de l'obtention

du Grade de Docteur ès Sciences Physiques

par

**P. AZEMA**

Ingénieur ENSEEHT
Docteur-Ingénieur

---

# CONTRIBUTION A LA SYNTHÈSE DE FONCTIONS LOGIQUES A L'AIDE D'ÉLÉMENTS A SEUIL

*Soutenue le 15 décembre 1970 devant la Commission d'Examen :*

| | | |
|---|---|---|
| MM. J. LAGASSE | | *Président* |
| Y. SEVELY<br>G. GRATELOUP | } | *Examinateurs* |
| J. KUNTZMAN<br>C. DURANTE | } | *Invités* |

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE PAUL SABATIER TOULOUSE

DIRECTION DE L'UNIVERSITE

| | |
|---|---|
| M. LARENG | Président |
| M. MATHIS | 1er Vice-Président |
| M. MARTIN | 2e Vice-Président |
| M. MOUNIQ | 3e Vice-Président |

HONORARIAT

| | |
|---|---|
| M. BLAIZOT | Doyen honoraire |
| M. CAPDECOMME | Doyen honoraire, Recteur honoraire |
| M. DELTHEIL | Doyen honoraire, Recteur honoraire, Professeur honoraire |
| M. DUPOUY | Membre de l'Institut, Doyen honoraire, Directeur Général honoraire du C.N.R.S., Professeur honoraire |
| M. DURAND | Doyen honoraire |
| M. FOUCHE | Professeur honoraire |
| M. GAUSSENS | Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut |
| M. JACQUES | Professeur honoraire |
| M. MIGNONAC | Professeur honoraire |
| M. MORQUER | Professeur honoraire, Correspondant de l'Institut |
| M. SECONDAT | Professeur honoraire |
| M. TEISSIE-SOLIER | Professeur honoraire |
| M. VANDEL | Professeur honoraire, Membre de l'Institut. |

PROFESSEURS

| | |
|---|---|
| M. ESCANDE | Mécanique des Fluides, Membre de l'Institut |
| M. CASTERAS | Géologie, Correspondant de l'Institut |
| M. BEDOS | Chimie |
| M. CAPDECOMME | Minéralogie |
| M. DUPIN | Radioélectricité |
| M. NOUVEL | Biologie Générale |
| M. GALLAIS | Chimie, Correspondant de l'Institut |
| M. DURAND | Physique |
| M. FERT | Physique |
| M. DIEHL | Agronomie |
| M. LESBRE | Chimie Organique |
| M. BRUNEL | Physiologie Végétale |
| M. HURON | Mathématiques Appliquées |
| M. MARGULIS | Pédologie |
| M. TRICHE | Chimie Analytique et Spectrographie |

| | |
|---|---|
| M. LEDOUX | Zoologie Appliquée |
| M. RIVALS | Agriculture |
| M. PERRIER | Physique |
| M. MATHIS | Chimie |
| M. ORLIAC | Géochimie et Minéralogie |
| M. LAFOURCADE | Physique |
| M. ANGELIER | Zoologie |
| Melle DE FERRE | Botanique |
| M. FARRAN | Minéralogie et Géotechnique |
| M. LAUDET | Physique Théorique et Calcul Numérique |
| M. SERFATY | Biologie Animale |
| M. NOUGARO | Hydraulique Générale et Appliquée |
| M. LAGASSE | Electrotechnique |
| M. GARDY | Génie Chimique |
| M. BLANC | Physique Nucléaire |
| M. BIREBENT | Electronique Appliquée |
| M. VOIGT | Chimie Minérale |
| M. LEREDDE | Botanique |
| M. LELUBRE | Géologie |
| M. TROCHAIN | Botanique |
| M. MASDUPUY | Chimie |
| M. LALAGUE | Mathématiques Générales |
| M. DESSENS | Physique du Globle, Correspondant de l'Institut |
| M. BOUIGUE | Astronomie |
| M. COUCHET | Physique |
| M. LEJEUNE | Chimie |
| M. LASCOMBES | Botanique |
| M. ASSELINEAU | Chimie Biologique |
| M. MAURET | Chimie Systématique |
| M. AGID | Physiologie |
| M. MONTANT | Cryptogamie |
| M. GAUTIER | Physique |
| M. CRUMEYROLLE | Mathématiques |
| M. GOURINARD | Géologie |
| M. PULOU | Minéralogie |
| M. CAMBOU | Physique Spatiale |
| M. MIQUEL | Chimie |
| M. LACOSTE | Electrotechnique |
| M. THIBAULT | Mécanique Rationnelle et Appliquée |
| M. MONTEL | Chimie Physique et Electrochimie |
| M. MASCART | Mathématiques |
| M MEDIONI | Psychophysiologie |
| M. THIRRIOT | Hydrodynamique E.N.S.E.I.H.T. |
| M. BRENON | Géologie |
| M. LAFON | Calcul Différentiel et Intégral |
| M. RAYNAUD P. | Physiologie Animale |

| | |
|---|---|
| M. ZALTA | Chimie Biologique |
| M. SEVELY | Electrotechnique |
| M. POMMIEZ | Mathématiques |
| M. REY | Biologie Végétale |
| M. COULOMB | Physique |
| M. TRINQUIER | Physique |
| M. MARONI | Chimie |
| M. BEETSCHEN | Biologie Générale |
| M. GRUAT | Mécanique des Fluides (Hydraulique) |
| M. DERACHE | Physiologie Animale |

PROFESSEURS ASSOCIES

M. MANSOUR
M. SAKUMA

PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | |
|---|---|
| M. HAMANT | Botanique |
| Mme BRUNEL | Physiologie Végétale |
| Melle BERDUCOU | Physiologie Végétale |
| M. PICCA | Physique |
| M. MERIC | Mathématiques Appliquées |
| Mme LECAL | Zoologie |
| M. BUGAREL | Génie Chimique |
| M. MIROUSE | Géologie |
| M. PILOD | Physique |
| M. LARROQUE | Physique |
| M. BARRANS | Chimie |
| Mme LAFON | Mathématiques |
| Melle LAPEYRE | Mathématiques (Informatique) |
| M. DAT | Mécanique des Fluides |
| M. JEANNIN | Chimie Minérale |
| M. BERTRAND | Chimie |
| M. SATGE | Chimie Organique |
| M. DESQ | Mathématiques |
| M. MAHENC | Chimie |
| M. LATTES | Chimie |
| M. ROCARD | Electronique |
| M. DEGEILH | Physique |
| M. FALLOT | Biologie Végétale (Viticulture et Arboriculture) |
| M. POILBLANC | Chimie |
| M. TOUZE | Physiologie Végétale |
| M. FRASNAY | Mathématiques |
| M. CASSAGNAU | Zoologie |
| M. GUERIN | Mathématiques |

MAITRES DE CONFERENCES

| | |
|---|---|
| M. BLANCHARD | Mathématiques |
| M. HOFFMANN | Electronique |
| M. BITSCH | Zoologie |
| M. FONTAN | Physique Nucléaire |
| M. PESCIA | Physique |
| M. SICARD | Biologie Génétique |
| M. CAUSSINUS | Mathématiques Appliquées |
| M. DE LOTH | Chimie Physique |
| M. MARTY | Physique Industrielle |
| M. BAUDRAS | Chimie Biologique |
| M. DURAND Ph. | Physique |
| M. LEFEUVRE | Electronique E.N.S.E.I.H.T. |
| M. SOUQUET | Géologie |
| M. SAPORTE | Physique |
| M. ATTEIA | Mathématiques |
| M. ENJALBERT | Chimie |
| M. IMBERT | Psychophysiologie |
| M. SCHNEIDER | Biologie Cellulaire |
| M. ANGELINO | Génie Chimique |
| M. DABOSI | E.N.S.C. |
| M. ETTINGER | Mathématiques |
| M. CALVET | Mécanique des Fluides (E.N.S.E.I.H.T.) |
| M. PAGANI | Physique |
| M. CUPPENS | Mathématiques |
| M. MATHIEU | Chimie Analytique |
| M. TRANNOY | Physique (E.N.S.E.I.H.T.) |
| M. CASTAGNETTO | Mathématiques (E.N.S.E.I.H.T.) |
| M. GILOT | Génie Chimique (Institut de Génie Chimique) |

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. PUN
M. PARKS

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

| | |
|---|---|
| M. BEAUFILS | Informatique |
| M. DARROZES | Mécanique |
| Melle BARBANCE | Mathématiques. |

Personnel de la Faculté affecté à l Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

PROFESSEURS

| | |
|---|---|
| M. ROQUES | Chimie Industrielle |
| M. GRATELOUP | Génie Electrique |

PROFESSEURS SANS CHAIRE

| | |
|---|---|
| M. CASSIGNOL | Génie Electrique |
| M. COLLETTE | Physique |
| M. MASO | Génie Civil |

MAITRES DE CONFERENCES

| | |
|---|---|
| M. FAGET | Physique |
| M. TRUCHASSON | Mécanique |
| M. SCHUTTLER | Physique |
| M. MIRA | Génie Electrique |
| M. LETURCQ | Génie Electrique |
| M. SIRIEYS | Génie Civil |
| M. DURAND G. | Chimie |
| M. CARRARA | Physique |

CHARGE D'ENSEIGNEMENT

| | |
|---|---|
| M. VERDIER | Chimie |

Personnel affecté à l'Institut Universitaire de Technologie de Toulouse

MAITRES DE CONFERENCES

| | |
|---|---|
| M. MARTIN | Génie Electrique |
| M. PERENNOU | Informatique |
| M. THENOZ | Minéralogie |

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

| | |
|---|---|
| M. REY | Génie Electrique |

ADMINISTRATION

| | |
|---|---|
| M. PRINEAU | Secrétaire Général de l Université. |

*A ma femme,*

*A tous les miens,*

*En témoignage d'affection.*

*Tout ce qui est simple est faux,*
*Tout ce qui est complexe est inutilisable.*

*P. VALERY*

# AVANT PROPOS

Ce mémoire de thèse, étape importante de notre travail de chercheur, doit son existence à de nombreuses personnes, qu'il nous soit permis ici de rappeler le nom de certains, parmi tous ceux qui nous ont aidé, pour mieux les remercier.

Messieurs les Professeurs LAGASSE et SEVELY, par leurs enseignements, nous ont incité à la recherche.

Monsieur le Professeur LAGASSE, Directeur du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales du Centre National de la Recherche Scientifique, en nous accueillant au Laboratoire de Génie Electrique, puis au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales, nous a permis de trouver l'environnement et les moyens propices à notre travail. Nous le remercions de nous avoir fait l'honneur de présider notre Jury de thèse.

Nous remercions Monsieur le Professeur SEVELY, notre Directeur de Recherche au C.N.R.S., et Monsieur le Professeur GRATELOUP dont nous nous sommes efforcé de suivre les remarques pour mieux parachever ce mémoire, de l'honneur qu'ils nous font par leur participation au Jury.

C'est avec tout le respect que nous portons à Monsieur le Professeur KUNTZMAN que nous mesurons l'honneur de sa présence à ce Jury de Thèse.

Ce mémoire doit beaucoup à l'esprit et au dynamisme du groupe "Systèmes Logiques" que dirigeait Monsieur DURANTE, Maître de Recherche au C.N.R.S.. Après avoir travaillé sous sa direction, nous sommes très honoré de sa participation au Jury.

Nous formons le voeu de pouvoir toujours suivre, à notre mesure, l'exemple de dynamisme et de compétence de toutes ces personnes que nous remercions d'apporter à ce Jury le lustre et la caution de leur présence.

Nous remercions tous ceux qui nous ont aidé au Laboratoire.

Nous remercions plus particulièrement Messieurs JC. IPPOLITO et J. ERCEAU.

Nous remercions Mademoiselle SUBERCAZE, Messieurs LAPEYRE et FRESPUECH d'avoir mené à si bon terme la frappe et le tirage de ce mémoire.

# INTRODUCTION

Le développement de la technologie des circuits digitaux a conduit à l'élaboration de nouveaux types intéressants de dispositifs logiques appelés éléments à seuil. Les entrées et la sortie d'un tel élément sont binaires. La sortie est obtenue par comparaison de la somme pondérée des entrées à un certain seuil. Si la somme est supérieure ou égale au seuil, la sortie prend la valeur + 1, autrement la valeur 0, ce qui se traduit par le système suivant :

$$F = 1 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \geq T$$

$$F = 0 \quad \text{si} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i < T$$

où F et $x_i \in \{0, 1\}$ représentent respectivement la sortie et les entrées ($i = 1, \ldots, n$).

$w_i$, T sont des nombres réels positifs, négatifs ou nuls appelés respectivement poids et seuil.

Les éléments logiques à seuil représentent une généralisation des portes conventionnelles. En effet, une porte logique ET (OU), à n entrées, effectue la comparaison de la somme des variables d'entrées, chacune avec le même poids unité, avec un seuil dont la valeur est n (1). De même, la sortie d'une porte

majorité à cinq entrées prendra la valeur 1 seulement lorsque trois ou plus de ses entrées ont la valeur 1. La généralisation d'une telle porte majorité est l'élément à seuil, dans lequel les entrées peuvent avoir différends poids (éventuellement négatifs). La sortie indique alors si la somme pondérée des entrées atteint ou non un seuil donné.

Puisque les éléments à seuil ont une procédure de décision plus élaborée que les portes classiques, due à la dissymétrie des poids, ils sont plus efficaces lors de la réalisation de circuits logiques : I 'utilisation d'éléments logiques à seuil conduit à des réseaux plus compacts, ce qui permet une économie à la fois sur le nombre de circuits et sur le nombre d'interconnections.

Une autre propriété importante des éléments à seuil est qu'il est possible, par une variation des poids ou du seuil, de modifier leur comportement, ce qui les rend particulièrement intéressants en ce qui concerne la réalisation de circuits logiques adaptatifs.

Depuis 1959, de très nombreuses études [1] ont porté sur les éléments logiques à seuil et les fonctions logiques qu'ils permettent de réaliser directement, soit les fonctions logiques linéairement séparables.

Il est possible de distinguer différents domaines pour ces études.

Tout d'abord, l'étude des propriétés des fonctions logiques à seuil, parmi lesquelles peuvent être citées la monotonicité, l'assommabilité, la notion de matrice limite.

En second lieu, il a été répondu à la question de savoir si une fonction logique donnée était ou non linéairement séparable, soit à l'aide de tables qui fournissent toutes les classes de fonctions à seuil complètement spécifiées de sept variables au plus ; soit par le recours aux méthodes de résolution de systèmes d'inégalités linéaires, la méthode simplex, notamment.

Un troisième domaine, le plus actuel et le plus délicat, est celui de la synthèse de fonctions logiques quelconques, en particulier non linéairement séparables, à l'aide de réseaux d'éléments à seuil.

Ces études débouchent sur les réalisations technologiques tant au niveau de la conception de modules élémentaires, qu'à celui de la conception d'ensembles plus complexes, additionneur, compteur ou calculateur digital.

Le but de ce mémoire est d'apporter une contribution dans le troisième domaine qui a été défini ci-dessus, à savoir la synthèse de fonctions logiques à l'aide d'éléments à seuil.

A partir de la notion de matrice limite définie par MAYS [2] et de méthodes de calcul élaborées par HUGUES [3, 4] , nous avons mis en évidence certaines propriétés de décomposition de toute fonction logique, ainsi que les procédures pour obtenir ces décompositions. Ces propriétés permettent de concevoir différents types de réseaux d'éléments à seuil.

Le premier chapitre est consacré aux propriétés des fonctions logiques linéairement séparables. Il analyse plus particulièrement les notions de monotonicité, de sommabilité et de vecteur caractéristique d'une fonction à seuil. La notion de "Matrice Limite" et les propriétés de cette matrice sont exposées.

Deux types essentiels de décomposition de toute fonction logique en sous-fonctions à seuil seront décrits dans le deuxième chapitre. Les procédures d'obtention de ces décompositions seront détaillées.

L'objet du troisième chapitre est l'étude des réseaux d'éléments à seuil qui peuvent être obtenus à partir de ces décompositions. Les propriétés de composition des éléments à seuil entre eux, d'où résultent ces réseaux, seront aussi présentées.

# CHAPITRE 1

## Propriétés des fonctions logiques linéairement séparables

## DEFINITIONS ET NOTATIONS

I. 1. Fonction Logique linéairement séparable ou fonction à seuil

I. 2. Différentes représentations d'une fonction logique

I. 3. Matrice associée à une fonction logique linéairement séparable.

## I. PROPRIETES DES FONCTIONS LOGIQUES LINEAIREMENT SEPARABLES

II. 1. Monotonicité

II. 1. 1. Définition

II. 1. 2. Propriétés de monotonicité

II. 1. 3. Testsde monotonicité

II. 1. 3. 1. Utilisation du tableau de VEITCH

II. 1. 3. 2. Test Algébrique

II. 2. Sommabilité

II. 2. 1. Définition

II. 2. 2. Test de sommabilité

II. 3. Vecteur caractéristique

II. 3. 1. Définition

II. 3. 2. Propriétés

II. 3. 3. Classe d'équivalence des fonctions à seuil.

II. 4. Matrice limite d'une fonction à seuil

II. 4. 1. Définition

II. 4. 2. Propriétés

II. 4. 3. Interprétation géométrique

III. CONCLUSION DU CHAPITRE I.

Dans ce chapitre, après l'introduction des définitions et des notations, il sera rappelé les principales propriétés des fonctions logiques à seuil. Ceci dans le double but de définir les différentes approches possibles d'une fonction logique que l'on désire réaliser à l'aide d'éléments à seuil,d'une part, et d'autre part de déterminer les propriétés nécessaires à l'élaboration des méthodes de décomposition décrites au deuxième chapitre.

# I. DEFINITIONS ET NOTATIONS

## I. 1. Fonction Logique linéairement séparable ou Fonction à Seuil

Une fonction logique $F(x_1, \ldots, x_n)$ des n variables binaires $x_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$, est linéairement séparable, si et seulement si il existe $n + 1$ nombres réels $w_o, w_1, \ldots, w_n$ positifs, négatifs ou nuls, qui satisfassent le système d'inégalités linéaires (I) :

$$\text{I} \begin{cases} \text{a)} & w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \geqslant 0 \text{ lorsque } F(x_1, \ldots, x_n) = +1 \\ \text{b)} & w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n < 0 \text{ lorsque } F(x_1, \ldots, x_n) = -1 \end{cases}$$

Les éléments $w_i$, $i = 0, \ldots, n$ sont appelés poids.

Nous appellerons réalisation de la fonction F le vecteur $\underline{W}$, tel que $\underline{W}^T = (w_o, w_1, \ldots, w_n)$.

Une réalisation est normale lorsque, pour toute combinaison des variables, le vecteur $\underline{W}$ est tel que la relation (1) soit vérifiée.

$$(1) \qquad w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \geqslant 1 .$$

Dans ce cas, le système (I) s'écrit sous la forme (II)

$$\text{II} \begin{cases} w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \geqslant 1 \text{ lorsque } F(x_1, \ldots, x_n) = +1 \\ w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n \leqslant -1 \text{ lorsque } F(x_1, \ldots, x_n) = -1 . \end{cases}$$

Par la suite, nous ne considérerons que des réalisations normales.

Une réalisation normale est optimale lorsque la somme S est minimale, où :

$$S = \sum_{i=0}^{n} |w_i|$$

Remarque 1

Il est toujours possible de définir une réalisation normale.

En effet, considérons le système I.

Soit $\varepsilon$ , la plus petite valeur de l'expression suivante

$$\varepsilon = \min ( | w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n | )$$

Une réalisation normale est obtenue en divisant toutes les inégalités par $\varepsilon$ et en prenant des valeurs $w_i / \varepsilon$ comme nouveaux poids. Le système II est obtenu.

$S_i$ $\varepsilon = 0$, soit $-\delta$ la plus grande valeur négative prise par le membre de gauche de la relation I b.

Soit $w_o + \delta/2$ la nouvelle valeur de $w_o$, nous sommes ramenés au cas précédent.

Remarque 2

Une réalisation optimale permet la tolérance la plus

grande sur les valeurs des poids, lors d'une réalisation technologique.

En effet, l'erreur $\varepsilon$ qui résulte d'une tolérance, exprimée par un pourcentage $\delta$ de la valeur de chaque poids, s'exprime par :

$$\varepsilon = \delta \sum_{i=0}^{n} |w_i|$$

Cette erreur sera minimum, lorsque la somme $S = \sum_{i=0}^{n} |w_i|$ sera minimum.

Remarque 3

Ce n'est que par commodité dans la présentation des résultats que nous associons aux variables binaires les valeurs $\{-1, +1\}$, plutôt que les valeurs classiques $\{0, 1\}$. Le passage de l'une à l'autre est obtenu par une simple transformation linéaire soit $x_i \in \{-1, +1\}$, $y_i \in \{0, 1\}$

$$x_i = 2y_i - 1$$

Remarque 4

La réalisation optimale est unique pour les fonctions logiques linéairement séparables complètement spécifiées de sept variables au plus [18]. C'est pourquoi lorsque la réalisation optimale est mentionnée, il s'agit de telles fonctions.

## I. 2. Différentes représentations d'une fonction logique

Compte tenu des différentes propriétés des fonctions à seuil, il convient d'associer à chaque fonction, soit une représentation géométrique (un hypercube), soit une représentation de son image caractéristique (table de VEITCH) ; une notation matricielle permet enfin de représenter les systèmes d'inégalités du type I ou II.

Une fonction logique F sera ainsi représentée géométriquement comme sur la Figure I. 1.

$F_1 = x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ (Figure I. 1. a)

$F_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$ (Figure I. 1. b)

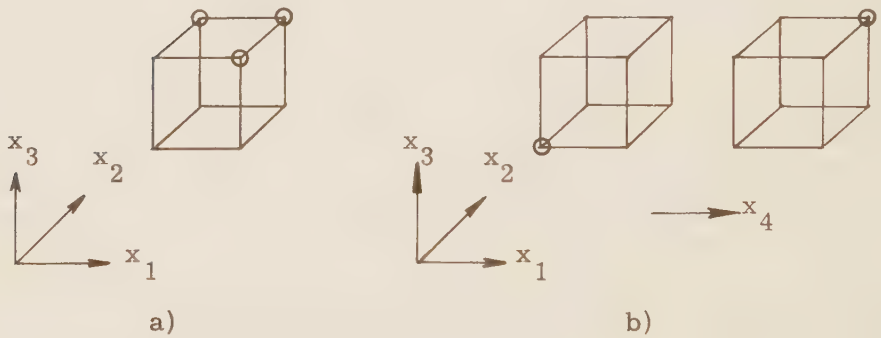



Figure I. 1.

D'une façon générale une fonction logique de n variables sera représentée sur un nombre c de cubes à trois dimensions avec $c = 2^{n-3}$

De plus, à chaque sommet sera associé le nombre décimal qui correspond à la numérotation binaire naturelle des variables (Figure I.2.)

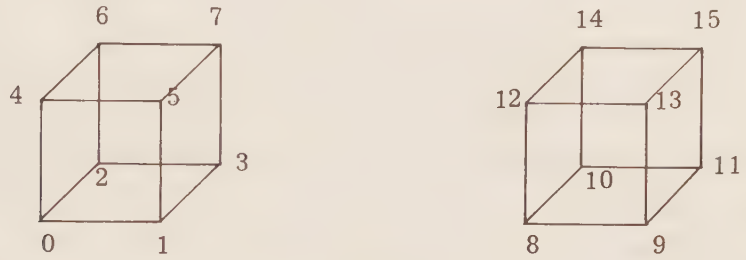



Figure I.2.

Les sommets où la fonction F prend les valeurs + 1 ou -1 seront notés respectivement $P_i$ ou $Q_j$ .

Par exemple : $F_1 = F(P_5, P_6, P_7)$

$F_2 = F(P_o, P_{15})$

Une autre représentation d'une fonction logique est celle de la Figure I.3., où l'image caractéristique de la fonction est présentée suivant un tableau de VEITCH.

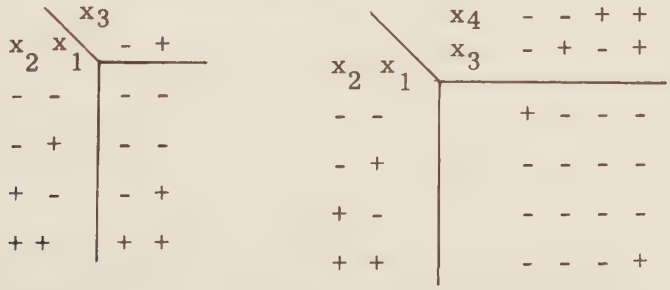



Figure I.3.

## I. 3. Matrice associée à une fonction logique linéairement séparable

Dans le cadre d'étude de fonctions à seuil, il est bon d'utiliser une notation matricielle qui traduira sous une forme plus réduite le système d'inégalités I.

Pour cela, une matrice A est définie, dont chaque colonne $a^j$ de dimension n + 1, associée à chaque sommet de l'hypercube est donnée par

$$(3)\quad a_0^j = F(x_1, \ldots, x_n)$$

$$(4)\quad a_i^j = x_i F(x_1, \ldots, x_n) \qquad i = 1, \ldots, n$$

où les valeurs de la variable $x_i$ et de la fonction F correspondent au sommet d'indice j considéré.

Pour une fonction F complètement spécifiée la matrice A est de dimension $(n + 1) \times 2^n$

Dans le cas de la fonction $F_1$

$$A = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & + & + & + \\ + & - & + & - & + & + & - & + \\ + & + & - & - & + & - & + & + \\ + & + & + & + & - & + & + & + \end{pmatrix}$$

Le Système II s'écrira alors :

$$\text{III} \qquad \underline{W}^T A \geqslant \underline{e}^T$$

où $\underline{e}$ représente le vecteur de dimension $2^n$, dont tous les éléments sont égaux à 1.

## II. PROPRIETES DES FONCTIONS LOGIQUES LINEAIREMENT SEPARABLES

### II. 1. Monotonicité [5]

#### II. 1. 1. Définition

Nous introduirons tout d'abord différentes notations.

a) Soit X l'assignement d'un certain nombre de variables $x_i$, choisies parmi les n variables de la fonction $F(x_1, \ldots, x_n)$. Un assignement X porte par exemple sur les variables $x_1$, $x_3$ et fixe la valeur de ces variables. X permet de définir une fonction réduite F .

Soit $X = \{ x_1 = 1, x_3 = -1 \}$

$F = x_1 x_2 \vee x_1 x_3$

$F_X = x_2$

L'assignement $\overline{X}$ fixe les valeurs opposées aux variables sur lesquelles porte l'assignement X.

Ici $\overline{X} = \{ x_1 = -1 ; x_3 = +1 \}$

$F_{\overline{X}} = -1$

Un assignement X qui porte sur p variables sera un assignement d'ordre p

b) Deux fonctions logiques $F(x_1, \ldots, x_n)$, $G(x_1, \ldots, x_n)$ seront comparables, si et seulement si l'une des deux relations suivantes est vérifiée:

(5.a.) $F \subseteq G$

(5.b.) $G \subseteq F$

soit : deux fonctions sont comparables si l'une implique l'autre.

Il est maintenant possible de définir la notion de monotonicité.

Fonction monotone d'ordre 1

Une fonction logique est monotone d'ordre 1 lorsque quel que soit l'assignement X d'ordre 1, les fonctions $F_{\overline{X}}$ et $F_X$ sont comparables.

Lorsque une fonction logique est monotone d'ordre 1, il existe une expression booléenne de la fonction telle que chaque variable n'apparaisse que sous une seule forme, soit la forme normale $x_i$ , soit la forme complémentée $\overline{x}_i$ . Il s'agit alors de fonctions monoformes (terme anglo-saxon : unate). De même, lorsque une telle expression existe, la fonction est monotone d'ordre 1.

Fonction complètement monotone

Une fonction logique est complètement monotone lorsque quel que soit l'assignement X d'ordre p, $p \leq n$, les fonctions $F_{\overline{X}}$ et $F_X$ sont comparables

Exemple :

Soit la fonction $F = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$

Cette fonction est monotone d'ordre 1, mais n'est pas

complètement monotone. En effet, pour

$$X = \{x_2 = 1 , x_4 = -1\}$$
$$F_X = x_1$$
$$F_{\overline{X}} = x_3$$

$F_X$ et $F_{\overline{X}}$ ne sont pas comparables.

*Théorème*

*Une fonction à seuil est complètement monotone.*

Démonstration

Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction à seuil et $\underline{W}$ la réalisation de la fonction.

Par un simple réarrangement des variables, il est toujours possible de faire porter un assignement X d'ordre p sur les p premières variables.

La fonction $F_X$ est réalisée par :

$$\underline{W}^T_X = (w_o^X, w_{p+1}, \ldots, w_n)$$

La fonction $F_{\overline{X}}$ est réalisée par :

$$\underline{W}^T_{\overline{X}} = (w_o^{\overline{X}}, w_{p+1}, \ldots, w_n)$$

avec pour $w_o^X$ et $w_o^{\overline{X}}$ les valeurs suivantes :

(6.a) $$w_o^X = w_o + \sum_{i=1}^{p} w_i x_i \text{ avec } x_i \text{ fixé par } X$$

(6.b) $$w_o^{\overline{X}} = w_o + \sum_{i=1}^{p} w_i x_i \text{ avec } x_i \text{ fixé par } \overline{X}.$$

Deux cas se présentent alors :

soit : $w_o^X \leqslant w_o^{\overline{X}}$ et $F_{\overline{X}} \subseteq F_X$

soit : $w_o^{\overline{X}} \leqslant w_o^X$ et $F_X \subseteq F_{\overline{X}}$

Remarque

La réciproque de ce théorème n'est vraie que pour un nombre de variables $n \leqslant 8$ . En effet, il existe au moins une fonction de neuf variables complètement monotone et non linéairement séparable [1].

II. 1. 2. Propriétés de monotonicité

Propriété 1

Si deux fonctions F et G sont comparables

soit $F \subset G \iff F \cdot \overline{G} = 0$

soit $G \subset F \iff F \cdot G = 0$

Propriété 2

Si F et G sont comparables alors $F_X$ et $G_X$ le sont aussi.

Propriété 3

Soit $\lceil n/2 \rceil$ l'entier immédiatement supérieur ou égal à n/2. Une fonction logique F monotone d'ordre $\lceil n/2 \rceil$ est complètement monotone.

Soit X un assignement d'ordre $> \lceil n/2 \rceil$ et soit

$F_X$ et $F_{\bar{X}}$ les fonctions réduites correspondantes qui ne sont pas comparables.

Il existe alors deux assignements V, W qui portent sur n - k variables tels que

$$F_{XV} = +1,\ F_{\bar{X}V} = -1\ ,\ F_{\bar{X}W} = +1,\ F_{XW} = -1$$

Ceci entraîne que les fonctions $F_V$ et $F_W$ ne sont pas comparables, ce qui contredit l'hypothèse d'une monotonicité d'ordre $\left[n/2\right]$ , pour la fonction F.

### II. 1. 3. Tests de monotonicité

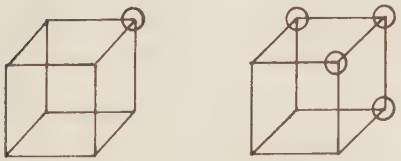
Nous donnons ici deux tests de monotonicité qui permettent l'étude de la monotonicité de fonctions d'un nombre de variables limité, inférieur ou égal à 5.

#### II. 1. 3. 1. Utilisation du tableau de VEITCH

La présentation d'une fonction sur un tableau de VEITCH permet d'effectuer rapidement la comparaison de fonctions réduites

soit par exemple la fonction

$F = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 x_4$ (Figure I. 4.)



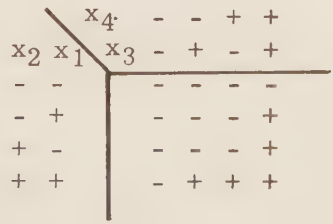



Figure I. 4.

Soit $X = \{ x_1 = 1 \}$

La comparaison de $F_{\overline{X}}$ et $F_X$ revient à comparer deux à deux les lignes numéro 1 et 3 d'une part, 2 et 4 d'autre part, du Tableau de la Figure I. 4.

De même la comparaison de la première colonne à la quatrième permet de conclure

$$F(x_3 = -1,\ x_4 = -1) \qquad F(x_3 = 1,\ x_4 = 1)$$

Cependant la visualisation est plus délicate pour les assignements qui ne portent pas sur les lignes ou sur les colonnes par exemple pour $X = \{ x_1 = +1 ,\ x = +1 \}$

La comparaison ligne à ligne ou colonne à colonne ne fournit donc qu'un ensemble de conditions nécessaires à la complète monotonicité.

### II. 1. 3. 2. Test algébrique [11]

Dans le cas de la monotonicité d'ordre 1, nous avons mis en évidence une relation algébrique qui fournit une réponse pour des fonctions complétement spécifiées.

Cette relation utilise la notion de différence booléenne.

La différence booléenne de la fonction F par rapport à la variable $x_i$ , notée $F'_{x_i}$ , est définie par la relation (7)

$$(7) \quad F'_{x_i} = F(x_i = -1) \oplus F(x_i = +1)$$

où l'opérateur $\oplus$ représente l'opérateur OU EXCLUSIF

*Théorème*

*La fonction logique F est monotone pour un assignement qui porte sur $x_i$ , si et seulement si*

$$(8) \qquad |\, b_i \,| = S_i$$

où

$$(9) \qquad b_i = \sum_{j=0}^{2^n - 1} x_i^j \; F(j)$$

$$(10) \qquad S_i = \sum_{j=0}^{2^n - 1} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F'_{x_i}(j) \right]$$

*où $x_i^j$ et F (j) représentent respectivement les valeurs de la variable $x_i$ et de la fonction F pour la combinaison j des variables x. Bien que la fonction $F'_{x_i}$ ne dépende pas de la variable $x_i$ , il est possible de considérer cette fonction comme une fonction dégénérée de n variables.*

Exemple

Soit $F = x_1 \, \overline{x}_2 \vee x_1 \, x_3$

On obtiendra successivement

$b_1 = 6$ $\qquad$ $S_i = 6$

$b_2 = -2$ $\qquad$ $S_2 = 2$

$b_3 = 2$ $\qquad$ $S_3 = 2$

II.2. Sommabilité [6]

Avant de définir la notion de sommabilité, il est bon d'examiner la représentation géométrique d'une fonction logique non complètement monotone.

Soit la fonction $F = x_1\ x_2 \vee x_3\ x_4$ (Figure I.5.)

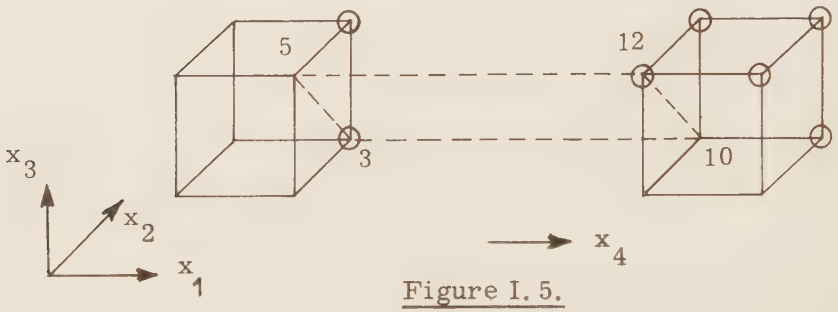



Figure I.5.

Cette fonction n'est pas monotone d'ordre 2. En effet, pour $X = \{x_1 = -1\ ,\ x_4 = +1\}$

$F_{\overline{X}}$ et $F_X$ ne sont pas comparables.

Il existe alors deux couples de points (5, 12), (3, 10) tels que, pour chaque couple, les variables $x_2$ et $x_3$ ont la même valeur, alors que $F_{\overline{X}}$ et $F_X$ ont des valeurs complémentées deux à deux.

Soit :

d'une part $x_2(5) = x_2(12) = -1$ ;

$x_3(5),\ x_3(12) = +1$ ;

$F_X(12) = +1,\ F_X(3) = -1$

d'autre part $x_2(3) = x_2(10) = +1$ ;

$x_3(3) = x_3(10) = -1$ ;

$F_X(10) = -1$, $F_{\overline{X}}(3) = +1$

Les valeurs de la fonction F pour les quatre sommets du parallélogramme formé par les arêtes joignant les quatre sommets 3, 5, 12, et 10 correspondent à celles de la fonction identité qui n'est pas linéairement séparable.

C'est l'expression algébrique de cette configuration géométrique qui conduit à la notion de sommabilité d'ordre 2, qui est décrite maintenant.

II.2.1. Définition

Soit P et Q les ensembles de vecteurs $\underline{P}_i$ et $\underline{Q}_j$ de dimensions n, et dont les composantes sont $x_i$ , i = 1, . . . , n tels que respectivement

$$F(P_i) = +1$$
$$F(Q_j) = -1$$

Une fonction logique F est sommable d'ordre 2, si et seulement si il existe au moins deux couples de points $P_i$, $P_j$ d'une part, $Q_k$ et $Q_l$ d'autre part, tels que la relation (11) soit vérifiée.

$$(11) \qquad \underline{P}_i + \underline{P}_j = \underline{Q}_k + \underline{Q}_l$$

Une fonction est assommable d'ordre 2, lorsqu'il n'existe pas de tels couples de points.

Exprimée en fonction des colonnes de la matrice A, cette relation devient :

$$(12) \quad a^i + a^j + a^k + a^l = \underline{0}$$

Exemple

Soit la fonction $F = x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$

Dans ce cas, la relation suivante est vérifiée

$$\underline{P}_1 + \underline{P}_2 = \underline{Q}_o + \underline{Q}_3$$

De même, pour la fonction précédente (Figure I. 5.)

$$F = x_1 x_2 \vee x_3 x_4$$

et $$\underline{P}_3 + \underline{P}_{12} = \underline{Q}_5 + \underline{Q}_{10}$$

soit $$\begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ +1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{pmatrix}$$

La notion de sommabilité d'ordre 2 peut se généraliser

Une fonction logique est sommable d'ordre k, s'il existe deux ensembles de k vecteurs $\underline{P}_i$ , $\underline{Q}_j$ tels que :

$$(12) \quad \sum_{i=1}^{k} \underline{P}_i = \sum_{j=1}^{k} \underline{Q}_j$$

Les vecteurs d'un même ensemble pouvant être identiques.

*Théorème*

*Toute fonction logique sommable d'ordre 2 n'est pas linéairement séparable.*

Démonstration

Soit une fonction logique F linéairement séparable. La réalisation $\underline{W}$ de cette fonction est telle que la relation (13) est vérifiée pour toute colonne $a^j$ de la matrice A associée à la fonction F.

$$(13) \qquad \underline{W}^T a^j \geqslant 1$$

Si, d'autre part, la fonction F est sommable d'ordre 2, la relation (14) est vérifiée :

$$(14) \qquad a^i + a^j + a^k + a^l = \underline{0}$$

d'où

$$(15) \qquad \underline{W}^T a^i + \underline{W}^T a^j + \underline{W}^T a^k + \underline{W}^T a^l = 0$$

ce qui conduit à l'impossibilité $0 \geqslant 4$

Corollaire

Toute fonction linéairement séparable est assommable d'ordre 2.

Il faut noter que l'assommabilité d'ordre deux n'est une condition nécessaire et suffisante de séparabilité que pour les fonctions d'un nombre de variables inférieur ou égal à 6. Au delà, une condition nécessaire et suffisante de séparabilité est l'assommabilité d'ordre k, quel que soit k [5] .

### II.2.2. Test de sommabilité d'ordre deux

Il est possible de transformer la relation vectorielle (11) en une relation algébrique, par le procédé de calcul suivant [Hopcroft].

A la représentation binaire de chaque sommet est associé le nombre décimal obtenu après avoir intercalé un zéro entre chaque digit (Figure I.6.).

Par exemple : Au sommet $P_{10}$ est associé le nombre décimal 68 obtenu par les transformations suivantes :

$$P_{10} \longrightarrow \underset{\text{binaire}}{1010} \longrightarrow \underset{\text{binaire}}{01000100} \longrightarrow \underset{\text{décimal}}{68}$$

Pour tester la sommabilité d'ordre deux, il suffira d'effectuer la comparaison entre les sommes des nombres décimaux pris deux à deux.

Par exemple : $\underline{P}_0 + \underline{P}_6 = \underline{P}_2 + \underline{P}_4$

devient : $0 + 20 = 4 + 16$

Il n'est pas possible d'effectuer une sommation sur les nombres décimaux directement associés à chaque sommet.

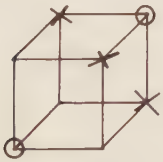
En effet : $\underline{P}_1 + \underline{P}_4 \neq \underline{P}_2 + \underline{P}_3$

alors que $1 + 4 = 2 + 3$

Dans ce cas on retrouve bien $1 + 16 \neq 4 + 5$

Figure I.6.

En ce qui concerne les fonctions incomplètement spécifiées *, cependant, il ne suffit plus de vérifier l'assommabilité d'ordre deux pour conclure à la séparabilité. Le contre exemple ci-dessous le montre



Soit la fonction F (Figure I.7.)

$F = +1$ pour $P_0$, $P_7$

$F = -1$ pour $Q_3$, $Q_5$, $Q_7$

et non spécifiée ailleurs.

Figure I.7.

Bien qu'il n'y ait aucune relation de sommabilité d'ordre deux, la fonction F n'est pas linéairement séparable.

* Une fonction à seuil, incomplètement spécifiée, doit satisfaire le système d'inégalités II, simplement pour les sommets spécifiés.

## II.3. Vecteur Caractéristique [7]

Le vecteur caractéristique d'une fonction logique linéairement séparable n'est défini que pour une fonction complètement spécifiée.

### II.3.1. Définition

Soit F une fonction linéairement séparable et A la matrice associée, définie par le système III.

$$\text{III} \qquad \underline{W}^T A \geqslant \underline{e}^T$$

Le vecteur caractéristique $\underline{B}$ de la fonction F est le vecteur de dimension $n + 1$ dont les éléments $b_i$ sont tels que

$$(16) \qquad b_i = \sum_{j=0}^{2^n - 1} a^j_i \qquad i = 0, \ldots, n$$

Chaque élément $b_i$ est égal à la somme de tous les éléments $a^j_i$ de la ième ligne de la matrice A.

*Théorème*

*La correspondance entre une fonction logique linéairement séparable et le vecteur caractéristique associé est biunivoque*

Démonstration

Soit deux fonctions logiques $F_1$ et $F_2$ linéairement séparables qui possèdent le même vecteur caractéristique $\underline{B}$

$$(17) \qquad \sum_{j=0}^{2^n-1} {}^1a_i^j = \sum_{j=0}^{2^n-1} {}^2a_i^j \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

Pour tout j tel que $F_1(j) = F_2(j)$

$$ {}^1a_i^j = {}^2a_i^j \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

soit pour $p + 1 \leqslant j \leqslant 2^n - 1$

Pour tout j tel que $F_1(j) = -F_2(j)$

$$ {}^1a_i^j = -{}^2a_i^j \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

soit pour $0 \leqslant j \leqslant p$

La relation (17) s'écrit donc :

$$\sum_{j=0}^{p} {}^1a_i^j + \sum_{j=p+1}^{2^n-1} {}^1a_i^j = (-1)\sum_{j=0}^{p} {}^1a_i^j + \sum_{j=p+1}^{2^n-1} {}^1a_i^j$$

d'où $\sum_{j=0}^{p} {}^1a_i^j = 0$ et $F_1$ est sommable d'ordre p, ce qui est impossible si la fonction $F_1$ est linéairement séparable.

II. 3. 2. Propriétés du vecteur caractéristique

Soit $\underline{B}$ le vecteur caractéristique de la fonction à seuil F, dont la réalisation est $\underline{W}$.

Alors le vecteur caractéristique obtenu à partir de $\underline{B}$, par toute permutation ou tout changement de signe, ou par ces deux opérations, effectuées sur les (n + 1) éléments de vecteur $\underline{B}$ définit encore une fonction logique à seuil. En outre, à la nouvelle fonction à seuil ainsi obtenue correspond une réalisation déterminée à partir de $\underline{W}$ par les mêmes opérations qui ont été effectuées sur $\underline{B}$.

Exemple (Figure I. 8.)

F1 F2

Figure I. 8.

Soit $F_1 = x_1 x_3 \vee x_1 x_2$

il lui correspond :

$$\underline{B}_1{}^T = (-2 ; 6, 2, 2)$$
$$\underline{W}_1{}^T = (-1 ; 2, 1, 1)$$

Soit $\underline{B}_2^T = (6 ; 2, 2. 2)$

il lui correspond $\underline{W}_2^T = (2 ; 1, 1, 1)$

et $F_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

### II. 3. 3. Classes d'équivalences des fonctions à seuil

Par définition, la forme canonique du vecteur $\underline{B}$ est constituée par le vecteur $\underline{B}_c$ , obtenu en rangeant par ordre décroissant les valeurs absolues des éléments du vecteur $\underline{B}$.

Deux fonctions à seuil appartiennent à la même classe d'équivalence si leurs vecteurs caractéristiques respectifs ont la même forme canonique.

Les classes d'équivalence regroupent les fonctions qui sont obtenues à partir d'une fonction donnée de la classe par les opérations suivantes :

. Premier type d'opérations qui ne fait pas intervenir l'élément $b_o$ : permutation et/ou complémentation des variables, les éléments $b_i$ et $w_i$ , $(i \neq 0)$ sont alors permutés et/ou complémentés de la même façon.

. Deuxième type d'opérations qui fait intervenir l'élément $b_o$ :

- soit complémentation de $b_o$ ; la nouvelle fonction F' est alors la fonction duale de la fonction F, ceci résulte de la définition même du vecteur caractéristique

- soit permutation de l'élément $b_o$ avec un élément $b_i$ ;

La nouvelle fonction F' est définie par :

$$F'(x_1,..,x_n) = x_i \oplus F(\overline{x_1 \oplus x_i},..,\overline{x_{i-1} \oplus x_i}, x_i, \overline{x_{i+1} \oplus x_i},..,\overline{x_n \oplus x_i})$$

Ces deux types d'opérations se confondent si l'on considère la fonction suivante qui est sa propre duale :

$$(22)\quad F_s(x_o, x_1,\ldots,x_n) = x_o F(x_1,\ldots,x_n) \vee \overline{x_o} F^D(x_1,\ldots,x_n)$$

où $F^D$ représente la fonction duale de la fonction F.

Les éléments $b_o$ et $w_o$ qui correspondent à la fonction $F_s$ sont alors tous les deux nuls [9]

II.4. Matrice limite d'une fonction à seuil [2]

Soit le système d'inégalités III

$$\text{III}\qquad \underline{W}^T A \geqslant \underline{e}^T$$

qui correspond à une fonction linéairement séparable donnée, complètement spécifiée ou non. Il apparait que toutes les inégalités de ce système ne sont pas toujours nécessaires pour définir parfaitement une fonction. Un nombre d'inégalités plus réduit peut suffire. Cette idée est explicitée par la notion de matrice limite.

II. 4. 1. Définition

La matrice limite M associée à une fonction logique linéairement séparable est définie à partir du système III, de la façon suivante :

1. Les colonnes de la matrice M sont des colonnes de la matrice A

2. $\underline{W}^T M \geqslant \underline{e}_m^T$ entraine $\underline{W}^T A \geqslant \underline{e}_a^T$ où m et a représentent le nombre de colonnes de M et de A

3. Le nombre de colonnes de la matrice M est minimum compte tenu des deux premières conditions.

II. 4. 2. Propriétés

Deux fonctions logiques sont adjacentes si elles ne diffèrent qu'en un seul sommet.

Parmi les fonctions logiques adjacentes à une fonction F, seules sont linéairement séparables celles pour lesquelles le point où elles diffèrent de la fonction F correspond à une colonne de la matrice limite M de la fonction F.

Cette propriété peut être formulée d'une façon différente.

La colonne $a^j$ appartient à la matrice limite de la fonction F si et seulement si la matrice $A_1$ obtenue à partir de la matrice A en multipliant la colonne $a^j$ par -1, définit encore une fonction logique linéairement séparable.

Nous démontrons maintenant cette propriété par la démarche suivante :

S'il existe une réalisation qui satisfasse (23) et (24) alors la fonction adjacente obtenue par complémentation du sommet $P_j$ est linéairement séparable (Lemme 1).

Un tel sommet correspond à une colonne de la matrice limite (Lemme 2).

Pour une colonne de la matrice limite, il est possible de déterminer une réalisation qui satisfasse (23) et (24) (Lemme 3).

Lemme 1

Soit une colonne de la matrice A telle que

(23) $\underline{W}^T a^j = 1$

(24) $\underline{W}^T a^i \geqslant 1$ pour $i \neq j$

Il est alors possible de déterminer un vecteur $\underline{V}$ tel que

(25) $\underline{V}^T a^j \leqslant -1$

(26) $\underline{V}^T a^i \geqslant 1$ pour $i \neq j$

En effet, soit le vecteur $\underline{V}$ tel que :

(27) $\underline{V} = n \underline{W} - a^j$

Le vecteur $\underline{V}$ vérifie bien les relations (25) et (26).

Lemme 2

La colonne $a^j$ qui vérifie la relation (23) appartient

à la matrice limite M, sinon la proposition 2 de la définition de la matrice limite ne serait pas vérifiée.

Lemme 3

Pour une colonne $m^j$ qui appartient à la matrice limite, il est toujours possible de déterminer un vecteur $\underline{W}$ tel que

$$(28) \quad \begin{cases} \underline{W}^T m^j = 1 \\ \underline{W}^T a^i \geq 1 \qquad\qquad a^i \neq m^j \end{cases}$$

En effet, il existe deux vecteurs $\underline{W}_1$ et $\underline{W}_2$ qui vérifient respectivement :

$$(29) \quad \underline{W}_1^T m^j < 1$$

$$(30) \quad \underline{W}_1^T m^i \geq 1 \qquad \text{pour } i \neq j$$

$$(31) \quad \underline{W}_2^T m^j \geq 1$$

$$(32) \quad \underline{W}_2^T m^i \geq 1 \qquad \text{pour } i \neq j$$

Il est alors possible de choisir $\theta$ compris entre 0 et 1 tel que le vecteur $\underline{W}$ défini par (33) vérifie la relation (28)

$$(33) \quad \underline{W} = \theta \, \underline{W}_1 + (1 - \theta) \, \underline{W}_2$$

Des trois lemmes ci-dessus, il est possible de tirer la conclusion suivante :

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'une colonne $a^j$ appartienne à la matrice limite M est qu'il existe une réalisation $\underline{W}$ telle que*

$$(34) \quad \underline{W}^T a^j = 1$$

La matrice limite possède, d'autre part, les deux propriétés suivantes :

. la matrice limite est unique

. le rang de la matrice M est égal au rang de la matrice A.

Exemples

Soit la fonction logique ET

$$F = x_1 x_2$$

Le système III s'écrit :

$$(w_o, w_1, w_2) \begin{bmatrix} - & - & - & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \end{bmatrix} \geqslant (1,\ 1,\ 1,\ 1)$$

Dans ce cas

$$\underline{W}^T = (-1\ ;\ 1,\ 1)$$

$$M = (a^1, a^2, a^3) = \begin{bmatrix} - & - & + \\ - & + & + \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

La Figure I.9. permet de vérifier que les trois fonctions adjacentes obtenues à partir de la matrice limite sont linéairement séparables, alors que la fonction $F_o = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2$ ne l'est pas.

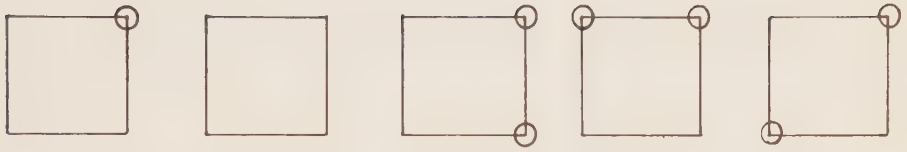



Figure I. 9.

Soit la fonction $F = (x_1 \vee x_2)\, x_3$ (Figure I. 10), dont la réalisation optimale est :

$$\underline{W}^T = (-1\ ;\ 1,\ 1,\ 2)$$

La matrice limite correspondante est constituée par les colonnes $a^3$, $a^4$, $a^5$, $a^6$ (sommets marqués d'un □ sur la Figure I. 10).

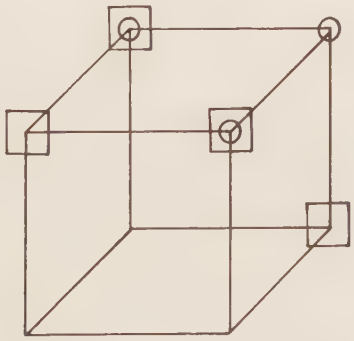


Figure I. 10.

En outre, dans le cas des réalisations optimales des fonctions à seuil complètement spécifiées de sept variables au plus ($n \leq 7$), nous avons mis en évidence la propriété remarquable suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une colonne $a^j$ appartienne à la matrice limite est qu'elle satisfasse à la relation :

$$\underline{W}^{*T} a^j = 1$$

où $\underline{W}^*$ représente la réalisation optimale de la fonction.

Pour cela, nous avons élaboré une méthode d'énumération des classes d'équivalence des fonctions logiques linéairement séparables. Cette méthode est décrite au Chapitre II.

### II. 4. 3. Interprétation géométrique

Il est commode de visualiser le système d'inégalités III, en considérant le plan orienté (P) d'équation (35) :

$$(35) \qquad w_o + w_1 x_1 + \ldots + w_n x_n = 0$$

Reprenons la Figure I. 10 en I. 11 où le plan P a pour équation

$$-1 + x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

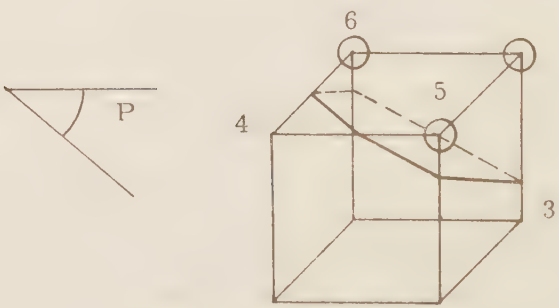



Figure I. 11

Les sommets qui correspondent aux colonnes de la matrice limite, soit :

$$Q_3 , Q_4 , P_5 , P_6$$

constituent en quelque sorte des points de butée entre lesquels le plan P peut être rendu mobile. A la réalisation optimale correspond le plan qui se trouve à égale distance de ces quatre sommets.

## III. CONCLUSION DU CHAPITRE I.

Les propriétés essentielles des fonctions logiques à seuil ont été présentées, en particulier la monotonicité complète, l'assomabilité d'ordre deux. A chacune de ces deux propriétés, correspondent des méthodes de synthèse de fonctions quelconques [YAJIMA, HOPCROFT] [6, 8] .

En second lieu, la notion de vecteur caractéristique permet de tester rapidement par tabulation, si une fonction logique complètement spécifiée est ou non linéairement séparable.

Enfin, nous avons introduit la notion de matrice limite que nous utiliserons pour mettre au point les différentes méthodes de décomposition qui sont décrites au deuxième chapitre.

# CHAPITRE 2

## Décomposition d'une fonction logique en fonctions linéairement séparables

I. ENUMERATION DES CLASSES D'EQUIVALENCE DES FONCTIONS A SEUIL

I. 1. Principe de la méthode

I. 2. Mise en oeuvre de la méthode

I. 3. Propriété de la réalisation optimale

II. DECOMPOSITION D'UNE FONCTION LOGIQUE EN SOUS-FONCTIONS LINEAIREMENT SEPARABLES

II. 1. Détermination de la forme I

$$F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$$

II. 2. Détermination de la forme I'

II. 3. Interprétation géométrique

II. 4. Réduction du nombre de sous-fonctions

II. 5. Minimisation du nombre de sous-fonctions

II. 6. Détermination de la forme II

$$F_o = F_1 \vee \bar{F}_2 \; F_3 \vee \ldots \vee \bar{F}_{2q} \; F_{2q+1}$$

III. CONCLUSION DU CHAPITRE II.

La première partie de ce chapitre développe une méthode originale d'énumération des classes d'équivalence des fonctions logiques à seuil. Ceci met en évidence une propriété remarquable qui relie la matrice limite à la réalisation optimale de la fonction.

La seconde partie présente différents types de décomposition d'une fonction logique quelconque en fonctions linéairement séparables. A partir de ces décompositions, il sera possible de déterminer les réseaux d'éléments à seuil susceptibles de réaliser toute fonction logique.

# I. ENUMERATION DES CLASSES D'EQUIVALENCE DES FONCTIONS A SEUIL

## I. 1. Principe de la méthode

Le principe réside dans la construction d'une suite particulière de fonctions à seuil. Cette suite possède les deux propriétés suivantes :

a) chaque nouvelle fonction est adjacente à la fonction précédente

b) chaque fonction comporte un nombre de sommets, pour lesquels la fonction prend la valeur + 1, supérieur à celui de la fonction précédente.

La suite obtenue sera donc une suite croissante de fonctions à seuil adjacentes.

Ce principe s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme

Soit une fonction logique linéairement séparable $F_o(P_1, P_2, \ldots, P_m)$. Il est toujours possible de construire une suite croissante de fonctions à seuil adjacentes deux à deux $F^1, F^2, \ldots, F^m$ qui comportent respectivement 1, 2, ..., m sommets et telle que $F^m$ soit identique à $F_o$.

Soit $F^1 \subset F^2 \subset \ldots \subset F^m = F_o$

Cela, quel que soit le premier sommet $P_i$ qui définit la première fonction, avec un seul sommet, $F^1(P_i) = +1$.

Pour confirmer cette approche, il suffirait de vérifier l'existence, pour toute fonction à seuil, d'un sommet de la fonction complément qui appartient à la matrice limite. Nous donnons la démonstration suivante du lemme précédent car elle détaille les procédures que nous utiliserons par la suite.

Démonstration

La démonstration est obtenue en montrant qu'il est impossible de ne pas trouver une fonction $F^{i+1}$ de i + 1 sommets, à partir d'une fonction $F^{i}$ de i sommets ; ces deux fonctions $F^{i}$ et $F^{i+1}$ impliqueront la fonction $F_o$.

Soit donc les hypothèses :

a) la fonction $F_o$ est linéairement séparable

Le système III est donc compatible, possède une solution

III $\quad \underline{W}^T A \geqslant \underline{e}^T$

b) la fonction $F^{i}$ est linéairement séparable et $F^{i} \subset F_o$

c) toutes les fonctions $F^{i+1}$ obtenues à partir de la fonction $F^{i}$ par l'adjonction d'un sommet $P_j$ tel que

(1) $\quad F_o(P_j) = +1$

(2) $\quad F^1(P_j) = -1$

ne sont pas linéairement séparables.

L'hypothèse c) permet de dire qu'aucune des co-

lonnes qui correspondent à un sommet $P_j$, n'appartient à la matrice limite $M^i$ de la fonction $F^i$

En particulier, la relation (3)

$$(3) \qquad \underline{W}^{iT} \; (-a^j) \geqslant 1$$

est une conséquence du système d'inégalités (4)

$$(4) \qquad \underline{W}^{iT} \; M^i \geqslant \underline{e}^T$$

où $M_i$ représente la matrice limite de la fonction $F^i$

où $\underline{W}_i$ est la réalisation de la fonction $F^i$

et où $a^j$ est la colonne correspondante au sommet $P_j$ dans la matrice A associée à la fonction $F_o$.

Compte tenu des relations 1 et 2, c'est bien $-a^j$ qu'il faut considérer par rapport à la fonction $F^i$.

La colonne $-a^j$ est donc une combinaison positive des colonnes de la matrice $M^i$

$$(5) \qquad -a^j = \sum \lambda_k \, a^k \qquad \text{avec } a^k \in M^i \quad \lambda_k \geqslant O$$

Comme aucune colonne $-a^j$, correspondant aux sommets $P_j$, susceptibles de définir une fonction à seuil $F^{i+1}$, n'appartient à la matrice limite $M^i$, cette relation (5) porte sur des colonnes de la matrice A

$$(5') \qquad a^j + \sum \lambda_k \, a^k = 0 \qquad a^k \in A$$

Or ceci est une condition nécessaire et suffisante [10] pour que le système d'inégalités III soit incompatible, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse a .

Il existe donc au moins un sommet $P_j$ qui permet de définir une fonction $F^{i+1}$ , adjacente à la fonction $F^i$ et linéairement séparable.

D'autre part, pour montrer que cette propriété est vraie quel que soit la première fonction $F^1$ choisie, il suffit de considérer la fonction qui ne comporte aucun sommet vrai (pour lequel $F(j) = +1$) ; pour cette fonction tous les sommets sont susceptibles de définir une fonction $F^1$ linéairement séparable.

Corollaire

De même, il sera toujours possible de construire une suite de fonctions à seuil adjacentes deux à deux telles que

$$F^{2^n - 1} \supset F^{2^n - 2} \supset \ldots \supset F^m \equiv F_o$$

Il suffit de considérer les fonctions complémentées pour se ramener au cas précédent :

$$\overline{F}^{2^n - 1} \subset \overline{F}^{2^n - 2} \subset \ldots \subset \overline{F}^m \equiv \overline{F_o}$$

## I.2. Mise en oeuvre de la méthode

Outre le principe ci-dessus, la méthode d'énumération est fondée d'une part sur la notion de matrice limite, d'autre part

sur la notion de vecteur caractéristique qui permet de définir les classes d'équivalence.

L'algorithme d'énumération (algorithme I) comporte les étapes suivantes.

1) La première classe d'équivalence est celle dont la fonction prototype est vraie pour $2^n - 1$ sommets, ou encore cette fonction ne prend la valeur - 1 que pour un seul sommet $Q_j$ .

Dans ce cas, la forme canonique du vecteur caractéristique et la réalisation optimale correspondantes sont respectivement :

$$\underline{B}^T = (b_o = 2^n - 2 \; ; \; b_i = 2 \; , \; i = 1, \ldots, n)$$

$$\underline{W}^{*T} = (w_o = n - 1 \; ; \; w_i = 1, \; i = 1, \ldots, n)$$

La fonction logique correspondante est la fonction OU.

2) Pour chaque réalisation optimale d'une fonction F qui comporte p sommets vrais, les vecteurs caractéristiques des fonctions à seuil adjacentes qui comportent p-1 sommets vrais, sont déterminés. Le sommet où chaque fonction adjacente diffère de la fonction de départ F, correspond à une colonne $a^j$ telle que

$$(6) \qquad \underline{W}^{*T} a^j = 1$$

$$(7) \qquad F(P_j) = +1$$

Le nouveau vecteur caractéristique $\underline{B}^{p-1}$ est calculé à partir du vecteur caractéristique $\underline{B}^{p}$ de la fonction F par la relation (8) .

(8) $\quad B^{p-1} = B^{p} - 2\,a^{j}$

3) Chaque vecteur caractéristique est mis sous forme canonique.

4) Une seule fonction à seuil est retenue par forme canonique distincte.

5) La réalisation optimale de chacune de ces fonctions est déterminée.

6) L'énumération se poursuit par un retour à la deuxième étape, où les vecteurs caractéristiques des fonctions qui comportent p -2 sommets vrais seront calculés.

La dernière classe de fonctions comporte les fonctions égales à 1 pour p sommets, avec $p = 2^{n-1}$ , dans ce cas, le premier élément du vecteur caractéristique est égal à zéro ; $b_o = 0$ .

Les différentes étapes de l'algorithme sont représentées Figure II. 1.

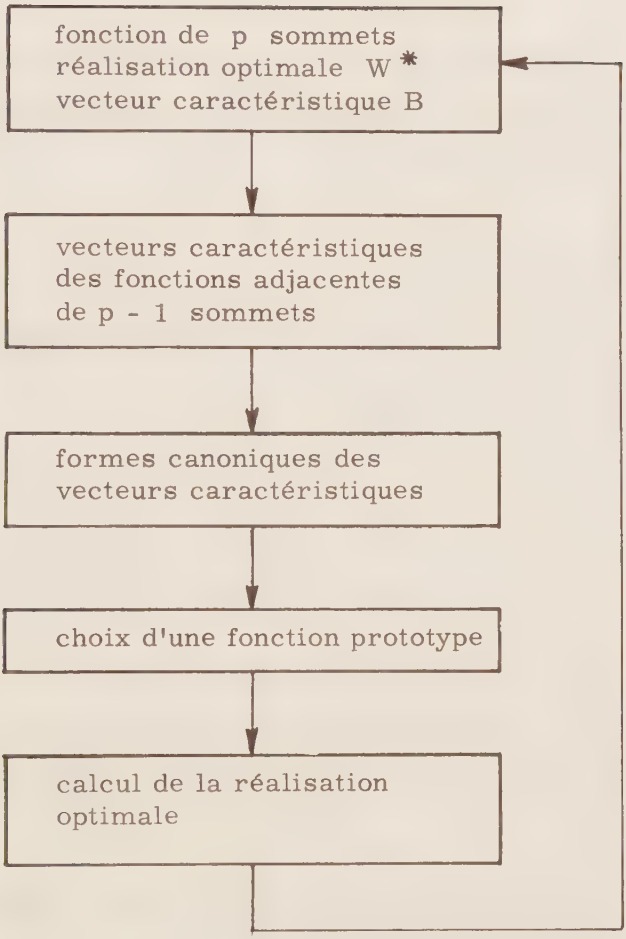

fonction de p sommets
réalisation optimale W*
vecteur caractéristique B
vecteurs caractéristiques
des fonctions adjacentes
de p - 1 sommets
formes canoniques des
vecteurs caractéristiques
choix d'une fonction prototype
calcul de la réalisation
optimale

Figure II. 1.

Remarque 1.

L'obtention de la réalisation optimale mentionnée à l'étape 5 s'effectue à l'aide de méthodes classiques de résolution d'inégalités linéaires [3].

Remarque 2.

L'intérêt de la méthode proposée réside dans le fait que d'une part seules des fonctions linéairement séparables sont considérées, d'autre part, seule la réalisation qui correspond à une fonction de chaque classe est calculée.

Exemple

Dans le cas particulier des fonctions de trois variables, cette méthode conduit aux résultats de la Figure II.2.

Cette figure se lit de la façon suivante :

Soit la fonction initiale F, qui ne vaut -1 que pour le sommet $Q_o$ et dont l'image sur le cube est représentée à la première colonne.

La réalisation optimale $\underline{W}^*$ de cette fonction est donnée à la troisième colonne $\underline{W}^* = (2 ; 1, 1, 1)$

La matrice limite M de cette fonction est constituée par les sommets mentionnés en quatrième colonne à savoir $Q_o, P_1, P_2, P$

Cette fonction possède trois fonctions adjacentes linéairement séparables qui comportent deux sommets où leur valeur est

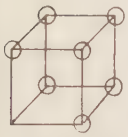
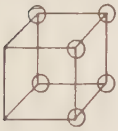
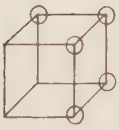
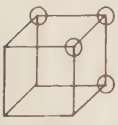
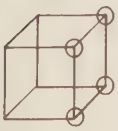
| Fonction Prototype de p sommets | Valeurs de j où $F(Q_j)=-1$ | Réalisation optimale $w_o; w_1, w_2, w_3$ | Valeurs de j pour $a^j \in M$ M=matrice limite | Vecteurs caractéristiques des fonctions adjacentes de p-1 sommets |
|---|---|---|---|---|
|  | 0 | 2; 1, 1, 1 | 0<br>1<br>2<br>4 | <br>4 0 4 4<br>4 4 0 4<br>4 4 4 0 |
|  | 0, 4 | 1; 1, 1, 0 | 0, 4<br>1<br>2<br>5<br>6 | 2 2 6 2<br>2 6 2 2<br>2 2 6-2<br>2 6 2-2 |
|  | 0, 2, 4 | 1; 2, 1, 1 | 2, 4<br>1<br>6 | 0 4 4 4<br>0 8 0 0 |
|  | 0, 1, 2, 4 | 0; 1, 1, 1 | 1, 2, 4<br>3<br>5<br>6 | |
|  | 0, 2, 4, 6 | 0; 1, 0, 0 | | |

Figure II. 2.

égale à - 1. Ces fonctions ont pour vecteur caractéristique respectivement :

$$F(Q_o , Q_1) \longrightarrow (4, 0, 4, 4)$$
$$F(Q_o , Q_2) \longrightarrow (4, 4, 0, 4)$$
$$F(Q_o , Q_4) \longrightarrow (4, 4, 4, 0)$$

La seule forme canonique distincte est donnée par (4, 4, 4, 0), il lui correspond la fonction $F(Q_o, Q_4)$, qui sera la fonction prototype de l'étape suivante.

Il faut noter que généralement, pour un nombre de variables supérieur à trois, il existe plusieurs fonctions prototypes d'un même nombre de sommets, comme c'est le cas ici pour les deux fonctions de quatre sommets $F(Q_o, Q_1, Q_2, Q_4)$ et $F(Q_o, Q_2, Q_4, Q_6)$.

### I.3. Propriété de la réalisation optimale

La méthode d'énumération précédente nous a permis d'établir que pour les fonctions complètement spécifiées de six variables au plus la propriété suivante était vérifiée [11] :

Soit $\underline{W}^*$ la réalisation optimale de la fonction F.

Soit $m^j \in M$ une colonne de la matrice limite associée à F.

Alors la relation (9) est vérifiée :

(9) $$\underline{W}^{*T} \; m^j = 1$$

Pour cela, nous avons vérifié que si la relation (10) était vérifiée, alors la fonction adjacente obtenue

$$(10) \qquad \underline{W}^{*T} \; a^j \; \succ \; 1$$

en changeant le signe de la colonne $a^j$ n'est pas linéairement séparable.

Cette relation (9) permettra par la suite de déterminer directement les sommets qui correspondent à la matrice limite d'une fonction à seuil F et, par là, de définir les fonctions adjacentes à la fonction considérée qui sont linéairement séparables.

La conjecture que nous pouvons formuler en ce qui concerne les réalisations optimales de fonctions d'un nombre de variables plus élevé est la suivante :

Lorsque la réalisation optimale $W^*$ est unique, alors la relation (9) est vérifiée

$$(9) \qquad \underline{W}^{*T} \; m^j = 1 \qquad\qquad m^j \in M$$

Dans le cas des fonctions de 8 variables, il existe plusieurs classes de fonctions pour lesquelles la réalisation optimale n'est pas unique [ Muroga] [18]. Il est possible de vérifier alors qu'il existe des colonnes $m^j$ qui appartiennent à la matrice limite et qui ne satisfont pas à la relation (9).

Exemple

Soit les deux réalisations optimales de la même fonction à seuil $^1\underline{W}^*$ et $^2\underline{W}^*$ [12]

$\underline{^1W}^{*T} = (14; 2, 2, 3, 5, 5, 6, 7, 9)$

$\underline{^2W}^{*} = (14; 2, 2, 3, 5, 5, 7, 6, 9)$

Considérons la colonne $a^{80}$ qui correspond au sommet $Q_{80}$.

$a^{80} = (-, +, +, +, +, -, +, -, +)$

(11) $\underline{^1W}^{*T} \; a^{80} = +1$

(12) $\underline{^2W}^{*T} \; a^{80} = +3$

La relation (11) montre que la colonne $a^{80}$ appartient bien à la matrice limite de la fonction, mais il existe une réalisation optimale $\underline{^2W}^{*}$ qui ne satisfait pas à la relation (9)

## II. DECOMPOSITION D'UNE FONCTION LOGIQUE EN SOUS-FONCTION LINEAIREMENT SEPARABLES

Nous présentons dans ce paragraphe deux types de décomposition particulière, ainsi que les procédures pour les obtenir.

Ces deux décompositions ont la forme suivante :

(13) $F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$

(14) $F_o = F_1 \vee \overline{F}_2 \, F_3 \vee \ldots \vee \overline{F}_{2q} \cdot F_{2q+1}$

où la fonction $F_o$ est une fonction logique quelconque de n variables binaires $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ et où les fonctions logiques $G_i$, (i = 1, ..., p) et $F_j$, (j = 1, ..., 2q + 1) sont toutes linéairement séparables.

II. 1. Détermination de la forme I

$$F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$$

Toute fonction logique peut être décomposées sous la forme I. Dans le plus mauvais des cas, chaque fonction $G_i$ correspondra à un monôme de l'expression de la fonction $F_o$, exprimée en somme de monômes, un monôme peut ne couvrir qu'un seul sommet.

Le problème est de déterminer le nombre maximum de sommets susceptibles d'être regroupés pour définir une seule fonction séparable, de façon à minimiser le nombre p de fonctions $G_i$.

La recherche de ces fonctions s'effectue d'une façon très analogue à l'algorithme décrit lors de l'énumération des classes d'équivalence des fonctions à seuil.

Cette recherche comporte les étapes suivantes :

A) Soit une fonction logique $F_o$ définie par son image caractéristique, ou encore par l'ensemble des sommets $P_1$, $P_2$, ..., $P_m$, pour lesquels la fonction $F_o$ prend la valeur + 1.

1. Choix arbitraire d'un sommet $P_1$ et calcul de la réalisation optimale $\underline{^1W^*}$ de la fonction $G_1$ vraie pour le seul sommet $P_1$.

2. Recherche parmi les sommets $P_i$ différents de $P_1$ d'un sommet $P_2$ qui vérifie la relation (15)

$$(15) \qquad \underline{^1W^*}^T \; a^2 = -1$$

où la colonne $a^2$ correspond au sommet $P_2$ dans la matrice A associée à la fonction $F_o$.

Le signe du second membre de la relation (15) provient de ce que les fonctions $F_o$ et $G_1$ ont des valeurs distinctes pour la combinaison des entrées qui correspond au sommet $P_2$.

Compte tenu de (15), la fonction vraie pour les deux sommets $P_1$ et $P_2$ est linéairement séparable.

3. Calcul de la réalisation optimale $\underline{^2W^*}$ de la nouvelle fonction $G_1$, vraie pour les deux sommets $P_1$ et $P_2$.

4. Recherche d'un sommet $P_3$, parmi les sommets $P_i$ distincts de $P_1$ et de $P_2$ qui vérifie la relation (16)

$$(16) \qquad \underline{^2W^*}^T \; a^3 = -1$$

Un tel sommet sera incorporé à la fonction $G_1$. On recherchera ainsi successivement les sommets qui appartiennent à la matrice limite des fonctions $G_1$, obtenues successivement. Ces sommets seront incorporés un à un.

Lorsque la recherche de sommets susceptibles d'être incorporés à la fonction $G_1$ échoue, la fonction $G_1$ représente la première fonction de la décomposition de la forme I.

Cette première partie de l'algorithme sera appelée FLMAX. Elle recherche, à partir d'une fonction logique donnée F, une fonction linéairement séparable G qui vérifie les relations suivantes :

(17) $G \subset F$

pour tout point $P_j$ tel que :

(18) $F(P_j) = +1$

(19) $G(P_j) = -1$

et (20) $\underline{W}^{*T} a^j < -1$

où $\underline{W}^*$ représente la réalisation optimale de la fonction G. La colonne $a^j$ de la relation (20) appartient à la matrice A associée à la fonction F. Elle exprime qu'il est impossible d'incorporer le sommet $P_j$ à la fonction G.

Cette procédure est représentée sur la Figure II. 3.

B) S'il existe encore des sommets $P_j$ qui n'ont pas été considérés, une nouvelle fonction $G_i$ sera déterminée par la procédure FLMAX, pour laquelle la fonction initiale sera la fonction F donnée par la relation (21)

(21) $F = F_o \cdot \bar{G}_1 \cdot \bar{G}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{G}_{i-1}$

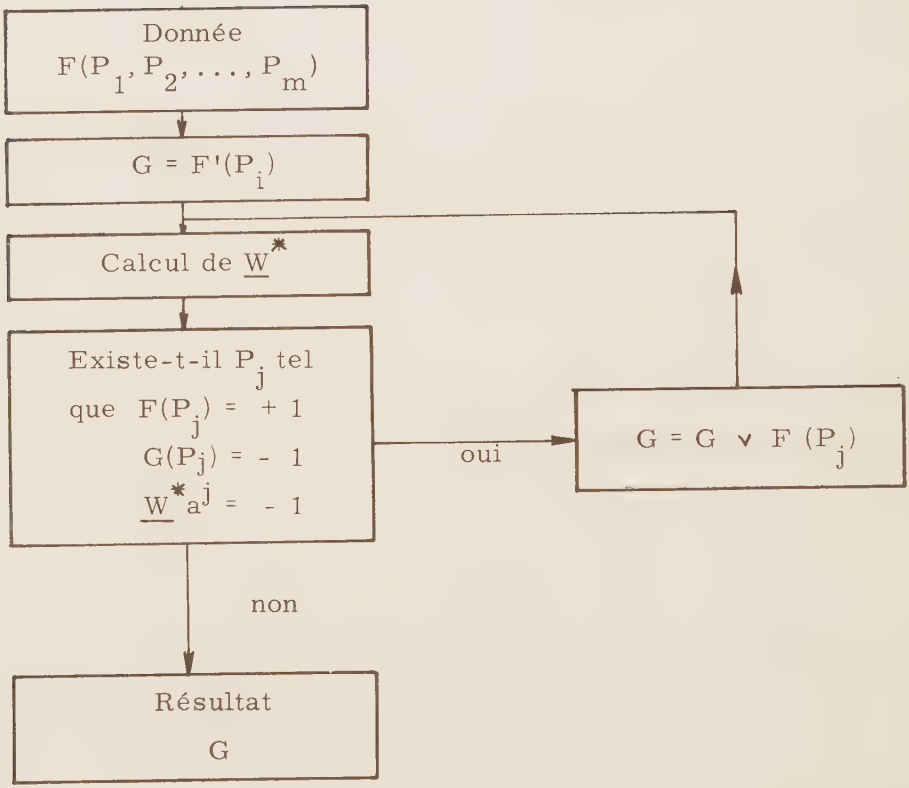



Figure II. 3.
Procédure FLMAX

c'est-à-dire la fonction F obtenue à partir de la fonction initiale $F_o$, dont sont éliminés les sommets $P_i$ qui appartiennent à une fonction G déjà calculée.

L'organigramme du calcul est représenté Figure II. 4.

La convergence est assurée car le nombre p de fonctions $G_i$ est fini. Tout sommet $P_j$ de la fonction $F_o$ est soit incorporé à une fonction G, soit utilisé comme premier élément, et éventuellement dernier élément, pour définir une nouvelle fonction G.

Exemple

Soit la fonction $F_o(P_o, P_5, P_6, P_7)$

$$F_o = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_3 (x_1 \vee x_2)$$

La séquence de fonctions qui permet d'aboutir à la première fonction $G_1$ est la suivante :

$$G(P_6) \longrightarrow G(P_6, P_7) \longrightarrow G(P_5, P_6, P_7) = G_1$$

En effet, à ce niveau, la réalisation optimale de la fonction $G_1$, ${}^1\underline{W}^{*T} = (-1\ ;\ 1,\ 1,\ 2)$ conduit à :

$${}^1\underline{W}^{*T}\ a^o = -5$$

et le sommet $P_o$ ne peut être incorporé.

Ce qui conduit à la décomposition finale

$$F_o = G_1 \vee G_2$$
$$G_1 = x_3 (x_1 \vee x_2)$$
$$G_2 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$$

$${}^1\underline{W}^{*T} = (-1\ ;\ 1,\ 1,\ 2)$$
$${}^2\underline{W}^{*T} = (-2\ ;\ -1,\ -1,\ -1)$$

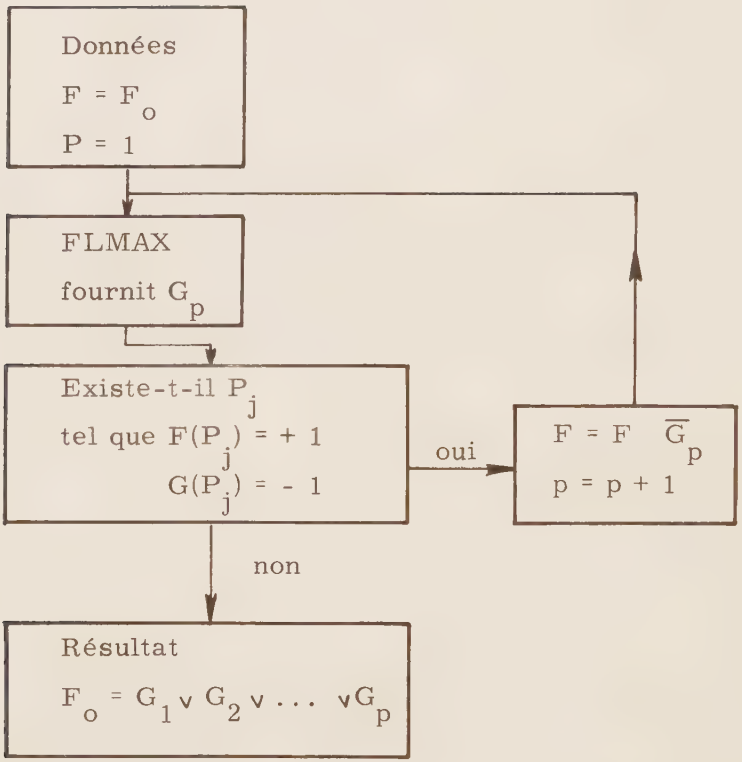



Figure II. 4.
Procédure I

## II.2. Détermination de la forme I'

$$F_o = G'_1 \cdot G'_2 \cdot \ldots \cdot G'_{p'}$$

Il s'agit de la forme duale de la forme I. Il suffira donc d'appliquer la procédure précédente à la fonction $\overline{F}_o$, complément de la fonction $F_o$.

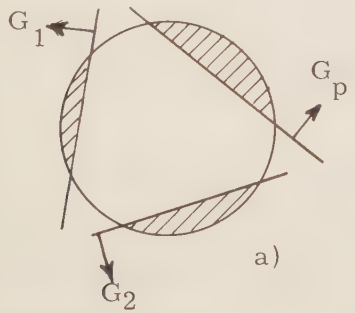
Le résultat qui est de la forme I, permet de passer à la forme I', suivant les relations (22) et (23).

$$(22) \qquad \overline{F}_o = \overline{G}'_1 \vee \overline{G}'_2 \vee \ldots \vee \overline{G}'_{p'}$$

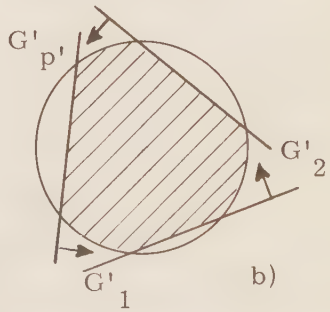
$$(23) \qquad F_o = G'_1 \cdot G'_2 \cdot \ldots \cdot G'_{p'}$$

## II.3. Interprétation géométrique de la Forme I

Représentée sur un diagramme de VENN, la fonction $F_o$ est soit la réunion de fonctions linéairement séparables dans le cas de la forme I (Figure II 5a), soit l'intersection de fonctions linéairement séparables, dans le cas de la forme I' (Figure II 5b). La figure II.6. représente les deux décompositions possibles de la fonction parité.




$F = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$




$F = G'_1 \cdot G'_2 \cdot \ldots \cdot G'_{p'}$

Figure II.5.

$$F_o = \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_4$$

Suivant le sommet initial choisi, la fonction $F_o$ peut être décomposée en trois fonctions linéairement séparables, qui sont obtenues par les séquences suivantes :

$G(1) \rightarrow G(1, 5) \rightarrow G(1, 5, 7) = G_1$

$G(11) \rightarrow G(11, 15) = G_2$

$G(0) = G_3$

Alors que la décomposition optimale conduit aux deux fonctions suivantes :

$G(0, 1, 5)$

$G(7, 11, 15)$

Afin d'obtenir une réduction du nombre de sous-fonctions, il est possible, au prix d'un temps de calcul plus important, d'utiliser une procédure plus élaborée.

Cette deuxième procédure comporte les deux phases suivantes :

Première phase

Application de la procédure FLMAX à partir de chaque sommet vrai de la fonction $F_o$. Ceci détermine un ensemble de fonctions linéairement séparables $G_i$, telles qu'il n'existe pas de fonction $H_i$ qui soit simultanément

. linéairement séparable

. strictement supérieure à une fonction $G_i$,

c'est-à-dire qui comprenne la fonction $G_i$, avec un nombre de sommets vrais supérieur .

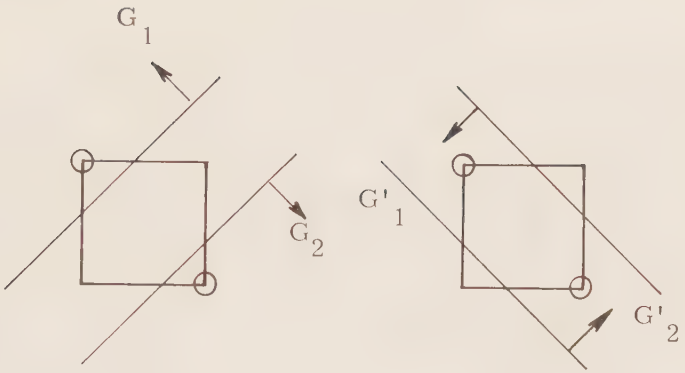



Figure II. 6.

II. 4. Réduction du nombre de sous-fonctions

La décomposition obtenue peut être non minimale en ce qui concerne le nombre p de fonctions $G_i$. C'est le cas en particulier lorsque la fonction $F_o$ comporte des constituants connexes non linéairement séparables.

Exemple

Soit la fonction $F_o(0, 1, 5, 7, 11, 15)$ (Figure II. 7.)

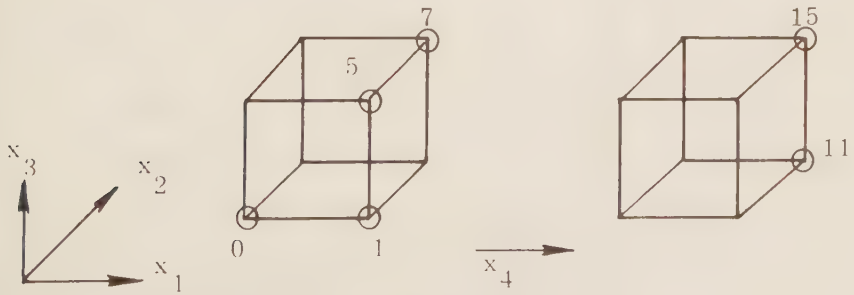



Figure II. 7.

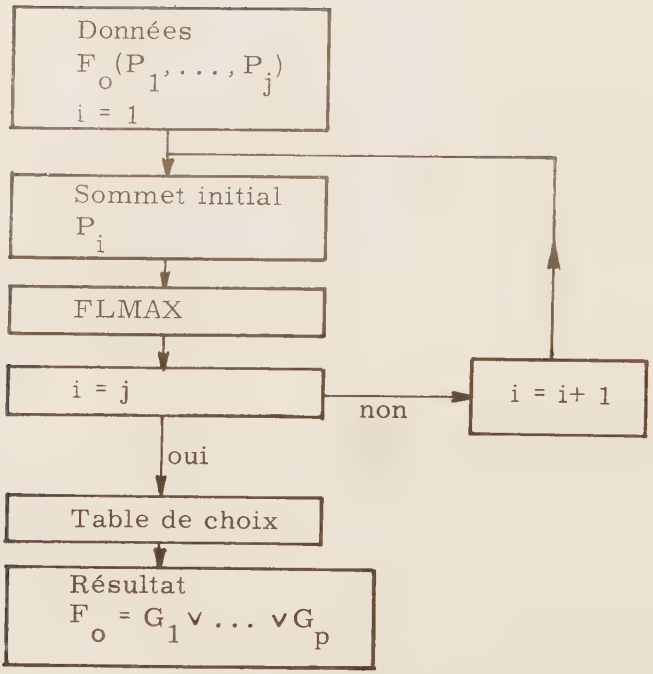



Figure II. 8.
Procédure II

| 1er sommet | 2e sommet | 3e sommet |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 5. |
| 1 | 0 | 5 |
| 5 | 1 | 0 |
| 7 | 5 | 1 |
| 11 | 15 | 7 |
| 15 | 7 | 5 |

a)

| | 0 | 1 | 5 | 7 | 11 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | x | x | x | | | |
| $G_2$ | | x | x | x | | |
| $G_3$ | | | | x | x | x |
| $G_4$ | | | x | x | | x |

$F = G_1 \vee G_3$

b)

Figure II. 9.

a) Génération des fonctions
b) Table de Choix.

et qui implique la fonction $F_o$

soit (24) $\quad G_i \subset H_i \subset F_o$

La principale modification par rapport à la procédure réside dans le fait que les sommets qui ont été incorporés à une fonction $G_i$, ne sont plus éliminés lors des étapes ultérieures.

Deuxième phase

Choix parmi cet ensemble de fonctions du nombre minimum de fonctions qui permette la couverture de la fonction donnée Cette deuxième phase utilise une table de choix analogue à celle utilisée lors de la minimisation de l'expression booléenne d'une fonction logique.

L'organigramme de la procédure 2 se présente alors suivant celui de la Figure II. 8.

Exemple

La figure II. 9. fournit les résultats de cette méthode appliquée à la fonction de l'exemple précédent

$$F_o = \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_4$$

## II. 5. Minimisation du nombre de sous-fonctions (procédure 3)

Soit une fonction logique non linéairement séparable $F_o$

L'objectif est d'atteindre le nombre minimal de fonctions linéairement séparables $G_i$, qui permette la couverture de la fonction donnée $F_o$.

Pour cela, la table de choix définie au paragraphe précédent doit être complète, c'est-à-dire contenir toutes les fonctions à seuil inclues dans la fonction $F_o$. Or la procédure II peut "laisser échapper" certaines fonctions, ainsi que le montre l'exemple ci-dessous :

Exemple

Soit la fonction $F_o$ (2 ; 3, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 31)

En fonction de chaque sommet initial, on obtiendra les séquences suivantes :

2, 3, 18
3, 2, 18
18, 2, 3
20, 21, 23
21, 20, 23
23, 21, 20
26, 18, 27
27, 26, 18
31, 23, 21

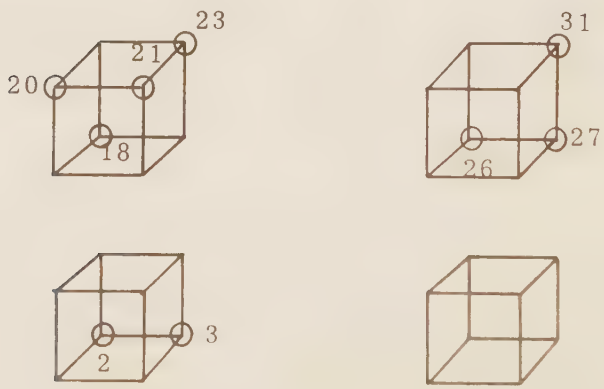



Figure II. 10

Soit comme fonctions distinctes :

$G_1$ (2, 3, 18)
$G_2$ (20, 21, 23)
$G_3$ (18, 26, 27)
$G_4$ (21, 23, 31)

et ces quatre fonctions sont nécessaires pour assurer la couverture.

Or cette liste ne comprend pas la fonction $G_5$(26, 27, 31), qui aurait conduit à la décomposition minimale $F_o = G_1 \vee G_2 \vee G_5$.

Ceci provient du fait que le sommet $P_j$ qui est choisi pour être incorporé à la fonction est celui d'indice j minimum qui se présente. La notion de premier sommet candidat se réfère à l'ordre de présentation des sommets. Cet ordre est arbitraire, mais demeure constant durant la suite des calculs. Ici, l'ordre choisi est celui des entiers naturels.

Afin d'obtenir une table de choix complète, il est nécessaire d'incorporer successivement à la fonction chaque sommet candidat pris un à un. On obtient la procédure 3 décrite ci-dessous :

Première phase

Chaque sommet vrai de la fonction est successivement considéré.

Il est utilisé comme sommet initial de la procédure FLMAX, modifiée de la façon suivante : au lieu d'incorporer à la fonction le premier sommet candidat, la liste des candidats sera conservée pour définir une autre séquence de sommets incorporés.

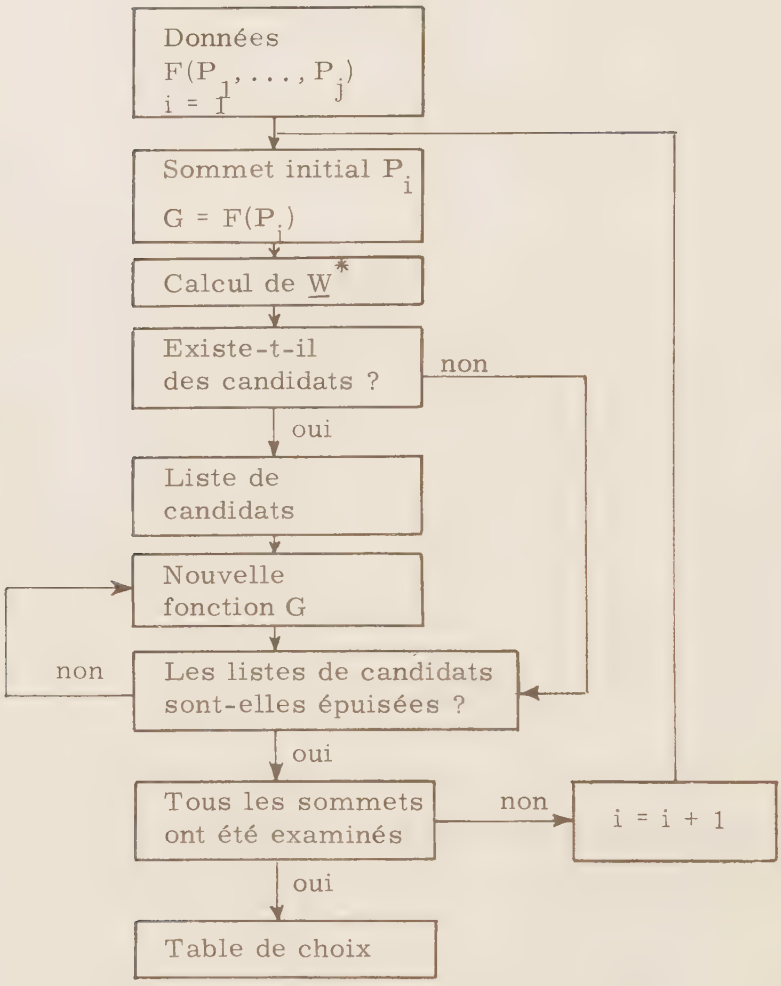



Figure II. 11.
Procédure III.

La liste complète des fonctions à seuil inclues dans la fonction donnée $F_o$ est ainsi obtenue.

Deuxième phase

Une table de choix est utilisée comme pour la procédure 2.

L'organigramme de ce calcul est représenté Figure II. 11

Exemple

Les méthodes de la procédure 3 appliquée à l'exemple précédent sont représentés Figure II. 12..

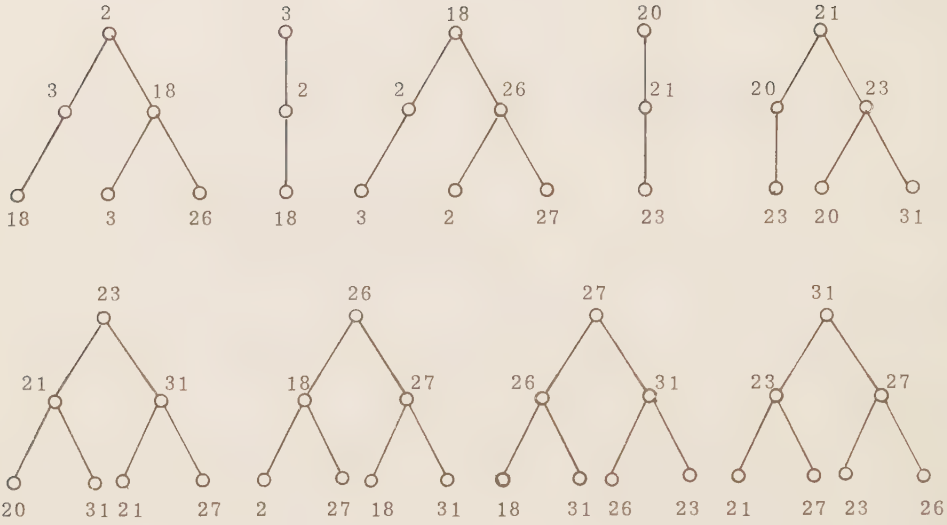
A chaque sommet initial correspond un arbre où les noeuds sont numérotés de haut en bas, par le numéro des sommets qui sont successivement incorporés à la fonction.

II. 6. Détermination de la forme II

$$F_o = F_1 \vee \overline{F}_2 \; F_3 \vee \ldots \vee \overline{F}_{2q} \; F_{2q+1}$$

Toute fonction logique $F_o$ peut être décomposée suivant la forme II. L'existence d'une telle décomposition est prouvée par la construction même de la décomposition. Une interprétation géométrique de la forme II est représentée sur la Figure II. 13. La fonction $F_o$ est constituée par la réunion des intersections des fonctions $\overline{F}_{2i} \cdot \overline{F}_{2i+1}$ (zones hachurées sur la figure).

La procédure suivante permet la détermination des différentes fonctions $F_i$. Elle comporte les étapes suivantes :




| | 2 | 3 | 18 | 20 | 21 | 23 | 26 | 27 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_1$ | x | x | x | | | | | | |
| $G_2$ | x | | x | | | | x | | |
| $G_3$ | | | x | | | | x | x | |
| $G_4$ | | | | | | | x | x | x |
| $G_5$ | | | | | | x | | x | x |
| $G_6$ | | | | | x | x | | | x |
| $G_7$ | | | | x | x | x | | | |

$$F_o = G_1 \vee G_4 \vee G_7$$

Figure II. 12.

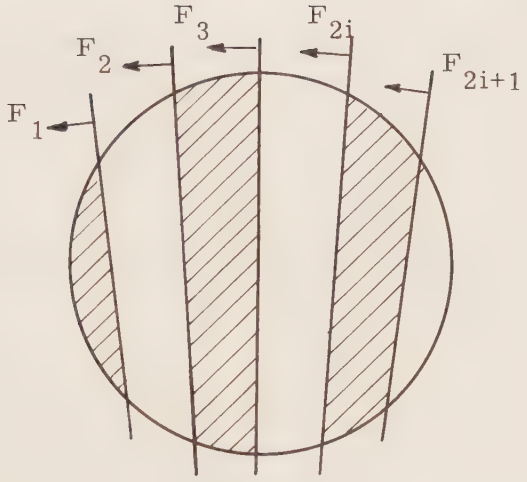



Figure II. 13.

1) A partir d'un sommet quelconque de la fonction $F_o$ (en fait, ce sommet sera le premier qui se présente dans l'image caractéristique de la fonction), application de la procédure FLMAX. Ceci conduit à l'obtention de la fonction $G = F_1$, telle que $F_1 \subset F_o$ et les sommets $P_j$ qui appartiennent à la fonction $F_o$ mais non à la fonction $F_1$ vérifient la relation (25).

$$(25) \qquad \underline{W}^{*T}\ a^j < -1 \qquad \text{pour } P_j \in F_o,\ P_j \notin F_1$$

2) Application de la procédure FLMAX à la fonction F définie par (26).

$$(26) \qquad F = \overline{F_o} \vee F_1$$

Mais ici, la fonction initiale de la procédure FLMAX, c'est-à-dire la fonction à laquelle des sommets seront incorporés, n'est plus une fonction à un seul sommet mais la fonction $F_1$, déterminée à l'étape précédente.

Ceci conduit à déterminer la fonction $F_2$ telle que

(27) $\quad F_1 \subset F_2 \subset F_1 \vee \overline{F}_o$

(28) $\quad \underline{W}^{+T} \; a^j < -1 \qquad$ pour $Q_j \in \overline{F}_o \cdot \overline{F}_1$, $Q_j \notin F_2$

3) Application de la procédure FLMAX à la fonction F

(29) $\quad F = F_2 \vee F_o$

avec comme fonction initiale la fonction $F_1$.

Le calcul est ainsi poursuivi ainsi que l'indique l'organigramme de la Figure II. 14. Les sommets qui seront successivement incorporés aux fonctions $F_i$ seront alternativement des sommets qui appartiennent à la fonction $F_o$ (pour i impair), ou $\overline{F_o}$ (pour i pair ).

Le test d'arrêt est obtenu, lorsque tous les sommets qui appartiennent à la fonction $F_o$ ont été considérés, c'est-à-dire incorporés à une fonction $F_i$ (i impair).

La convergence de la procédure est assurée si la suite des fonctions $F_i$ est strictement croissante en ce qui concerne le

nombre de sommets de chaque fonction $F_i$. C'est ce qui est exprimé par le théorème suivant :

*Théorème*

*Lors de la procédure précédente, pour i donné, la fonction* $F_{i+1}$ *comporte au moins un sommet de plus que la fonction* $F_i$.

Démonstration

Lorsque la procédure FLMAX se termine, elle fournit une fonction à seuil G, qui définit la fonction $F_i$ et telle que :

1) (30) $\quad F_{i-1} \subset F_i \subset F$

2) Tous les sommets $P_j$ tels que $P_j \in F$
$P_j \in \overline{G}$

vérifient la relation (31)

(31) $\quad \underline{W}^T a^j < -1$

3) Il existe toujours au moins un sommet $Q_k$ tel que $Q_k \in \overline{F}.\ \overline{G}$ qui vérifie la relation (32)

(32) $\quad \underline{W}^T a^k = -1$

C'est précisément ce sommet qui sera incorporé à la fonction $F_i$, lors de l'étape suivante :
à savoir : application de la procédure FLMAX à la nouvelle fonction $F = F_i \vee \overline{F}$ , avec comme fonction de départ la fonction $F_i$

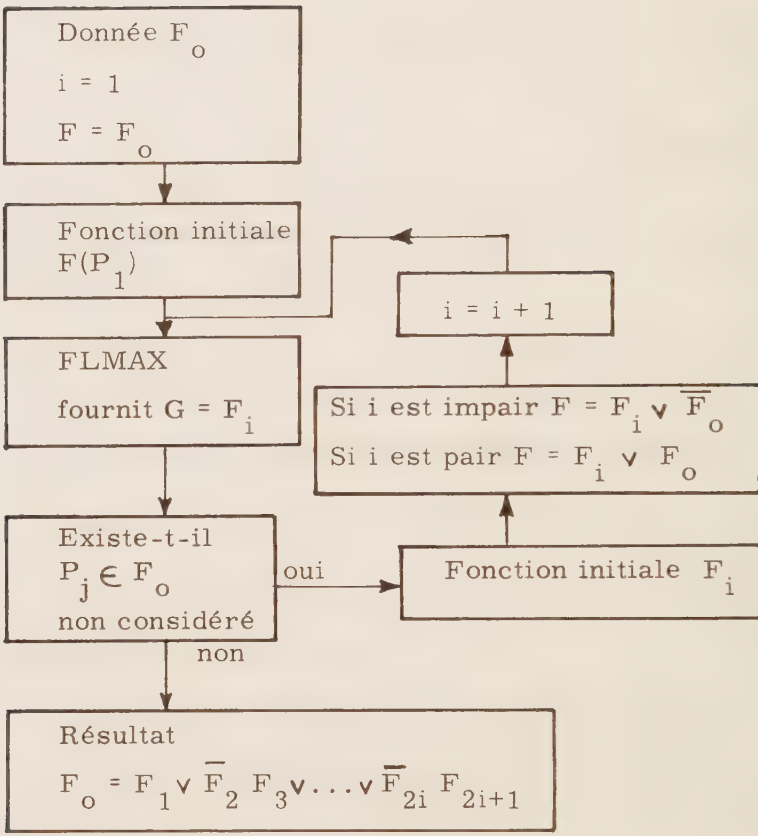



Figure II. 14.
Procédure pour la détermination de la forme II.

La fonction $F_{i+1}$ comporte alors au moins un sommet de plus que la fonction $F_i$.

La suite des fonctions est croissante, la dernière fonction $F_j$ aura été calculée lorsque l'une des deux configurations suivantes aura été obtenue.

a) Figure II. 15. a

$F_{2i} = F_{2i-1} \vee \overline{F}_o$ = fonction vraie en tout point.

b) Figure II. 15.b .

$F_{2i+1} = F_{2i} \vee F_o$ = fonction vraie en tout point.

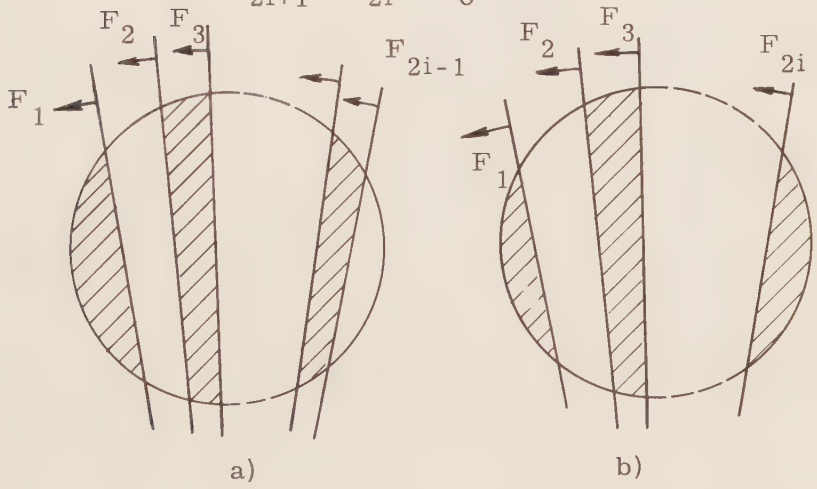



Figure II. 15.

Remarque

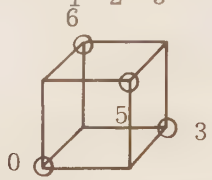
Si l'on considère la fonction $\overline{F}_o$, complément de la fonction $F_o$, il est possible d'obtenir la forme duale de la forme II.

$$(33) \qquad F_o = F'_1 \cdot (F'_2 \vee \overline{F}'_3) \ldots (F'_{2i} \vee \overline{F}'_{2i+1})$$

Exemple

Soit la fonction parité de trois variables

$$F(0, 3, 5, 6) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3$$




La première fonction obtenue est la fonction

$F_1 = F(0)$ $\qquad \underline{W}^{T*} = (-2 ; -1, -1, -1)$

on obtient alors $\underline{W}^{T*} \cdot (a^3, a^5, a^6) = (-3, -3, -3)$

La procédure FLMAX est alors appliquée à la fonction

$F_1 \vee \overline{F}_o = F(0, 1, 2, 4, 7)$

Cette procédure conduit à la suite de fonctions :

$F(0) \rightarrow F(0, 1) \rightarrow F(0, 1, 2) \longrightarrow F(0, 1, 2, 4)$

$F_2 = F(0, 1, 2, 4)$ $\qquad \underline{W}^{T*} = (0; -1, -1, -1)$

on obtient $\underline{W}^{T*} \cdot a^7 = -3$

La procédure FLMAX est alors appliquée à la fonction

$F_2 \vee F_o = F(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

Cette fonction est linéairement séparable et définit $F_4$

d'où $F_o = F_1 \vee \overline{F_2}\ F_3$

$F_1 = F(0)$ réalisée par $\underline{W}^T = (-2\ ;\ -1,\ -1,\ -1)$

$F_2 = F(0,\ 1,\ 2,\ 4)$ $\underline{W}^T = (0\ ;\ -1,\ -1,\ -1)$

$F_3 = F(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ $\underline{W}^T = (2\ ;\ -1,\ -1,\ -1)$

## III. CONCLUSION DU CHAPITRE II

Nous avons présenté dans ce chapitre, deux formes particulières de décomposition d'une fonction logique quelconque en fonctions linéairement séparables :

Forme I $F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$

Forme II $F_o = F_1 \vee \overline{F_2} F_3 \vee \ldots \vee \overline{F_{2q}} \cdot F_{2q+1}$

La détermination de ces fonctions est obtenue par la construction de suites de fonctions à seuil adjacentes et dont le nombre de sommets vrais est constamment croissant.

Les méthodes présentées utilisent la propriété suivante des colonnes $m^j$ de la matrice limite M associée à la fonction à seuil F dont la réalisation optimale est $\underline{W}^*$ :

$$\underline{W}^{*T} \cdot m^j = 1$$

Il est maintenant possible d'associer à chacune de ces décompositions, différents types de réseaux d'éléments à seuil susceptibles de réaliser toute fonction logique.

# CHAPITRE 3

## Réseaux d'éléments à seuil

I. PROPRIETES DE COMPOSITION

I. 1. Propriété 1

I. 2. Propriété 2

I. 3. Interprétation de la Propriété 2

II. DIFFERENTS TYPES DE RESEAU

II. 1. Réseau à deux niveaux

II. 2. Réseau en cascade simple

II. 3. Réseau avec l'opérateur U

II. 4. Réseau à trois couches

II. 5. Exemple de décomposition

III. CONCLUSION DU CHAPITRE III

Les problèmes posés par la synthèse d'une fonction logique à l'aide d'éléments à seuil recoupent ceux que pose la synthèse en général. Il est possible de citer, par exemple, les différents critères qui évaluent les performances d'un circuit :

. nombre de modules,

. temps de propagation (relié au nombre de modules placés en série)

. nombre limité d'entrées par modules ;

ces critères apparaissent quel que soit le type de modules logiques utilisés.

Les réseaux d'éléments à seuil, présentés dans ce mémoire, auront d'une part, une structure définie au préalable, d'autre part, le nombre d'entrées d'un élément à seuil ne sera pas limité.

Il sera établi tout d'abord différentes propriétés de composition de fonctions linéairement séparables. Le principe des démonstrations est de prouver , soit que la fonction considérée est complètement monotone, soit que le système d'inégalités associé est compatible, possède une solution [4] . Dans ce second cas, on montre que, compte tenu des hypothèses, il est impossible de trouver une combinaison non négative des colonnes de la matrice A, associée à la fonction F, combinaison non-négative égale à la colonne identiquement nulle.

**Soit une relation de la forme (1).**

(1) $\sum \lambda_j a^j = 0$ avec $\lambda_j \geq 0$
$\lambda_j \in A$

Si cette relation est impossible, le système d'inégalités correspondant est compatible, la fonction logique est linéairement séparable.

## I. PROPRIETES DE COMPOSITION

### I. 1. Propriété 1

Soit $G_1$ , $G_2$ deux fonctions logiques linéairement séparables des n variables binaires $x_1$ , $x_2$, ..., $x_n$ .

Les fonctions $H_1$ , $H_2$ des n + 1 variables binaires $x_1$ , $x_2$ , ..., $x_n$ , y incomplètement spécifiées, telles que :

(2) $y = G_2(x_1, \ldots, x_n)$

(3) $H_1 [x_1, \ldots, x_n, G_2(x_1, \ldots, x_n)] = G_1 \vee G_2$

(3') $H_2 [x_1, \ldots, x_n, G_2(x_1, \ldots, x_n)] = G_1 \cdot G_2$

sont linéairement séparables.

Démonstration

Considérons tout d'abord la matrice A associée à la fonction $H_1$, où nous distinguerons les quatre ensembles de colonnes suivants :

$A_1$ qui regroupent les colonnes pour lesquelles $G_1 = +1$ $G_2 = +1$

$A_2$ qui regroupent les colonnes pour lesquelles $G_1 = -1$ $G_2 = +1$

$A_3$ qui regroupent les colonnes pour lesquelles $G_1 = +1$ $G_2 = -1$

$A_4$ qui regroupent les colonnes pour lesquelles $G_1 = -1$ $G_2 = -1$

La table III. 1. donne successivement les images caractéristiques des fonctions $H_1$, $G_1$ et $G_2$ ainsi que les lignes de la matrice A qui correspondent à la première ligne, $\ell(x_o)$ et à la dernière, $\ell(G_2)$.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $H_1$ | + | + | + | - |
| $G_1$ | + | - | + | - |
| $G_2$ | + | + | - | - |
| $\ell(x_o)$ | + | + | + | - |
| $\ell(G_2)$ | + | + | - | + |

Table III. 1.

Si la fonction $H_1$ n'est pas linéairement séparable, il existe un vecteur colonne $\underline{\Lambda}$, dont tous les éléments sont positifs ou nuls, tels que :

(4) $\quad A.\underline{\Lambda} = 0$

ou encore :

$$(5) \qquad (A_1\ A_2\ A_3\ A_4) \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

La relation (5) explicitée par rapport aux lignes $\ell(x_o)$ et $\ell(G_2)$ fournit :

$$(6) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0$$

$$(7) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0$$

d'où $$(8) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

ce qui entraîne que tous les éléments de $\lambda_1$ et de $\lambda_2$ sont nuls.

$$(9) \qquad (A_1\ A_2\ A_3\ A_4) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

Il est alors possible de modifier le signe de chaque colonne de $A_2$

$$(10) \qquad (A_1\ -A_2\ A_3\ A_4) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$$

Or ce système est compatible en effet si $\underline{W}_1$ est la réalisation de la fonction G.

(11) $(\underline{W}_1^T, 0)\ (A_1, -A_2, A_3, A_4) \geqslant \underline{e}$

Il est donc impossible qu'une relation telle que (4) existe et la fonction $H_1$ est linéairement séparable.

Soit la fonction $H_2 = G_1 \cdot G_2$ (Table III. 2.)

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $H_2$ | + | - | - | - |
| $G_1$ | + | - | + | - |
| $G_2$ | + | + | - | - |
| $\ell(x_o)$ | + | - | - | - |
| $\ell(G_2)$ | + | - | + | + |

Table III. 2.

Si $H_2$ n'est pas linéairement séparable

(12) $(A_1\ A_2\ A_3\ A_4) \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = 0$

Soit :

(13) $+ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0$

(14) $+ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

d'où : $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$

Or la réalisation de $G_1$ conduit à :

$(W_1^T, 0)\quad (A_1 A_2 - A_3 A_4) \geqslant \underline{e}$

et donc la relation (15) est impossible

$$(15)\qquad (A_1 A_2 - A_3 A_4) \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

I.2. Propriété 2

Soient les trois fonctions linéairement séparables

$F_1, F_2, F_3$ telles que

$$(16)\qquad F_1 \subset F_2 \subset F_3$$

Alors la fonction H définie par :

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_n, F_2) = F_1 \vee \overline{F}_2 \quad F_3$$

est linéairement séparable.

Démonstration

La fonction H est complètement monotone. En effet :

Soit $y = \overline{F}_2$

Soit X un assignement qui ne porte pas sur la variable y

$$(17)\qquad H_{\overline{X}} \cdot \overline{H}_X = (F_{1\overline{X}} \vee y \cdot F_{3\overline{X}})\ \overline{F}_{1X}\ (\overline{y} \vee \overline{F}_{3X})$$

$$(18)\qquad H_{\overline{X}}\ \overline{H}_X = F_{1\overline{X}}\overline{F}_{1X} \vee y\overline{y}\overline{F}_{1X} F_{\overline{3X}} \vee y F_{3\overline{X}}\overline{F}_{3X} =$$

$$H_{\overline{X}}\ \overline{H}_X = 0 \implies H_{\overline{X}} \subset H_X$$

La fonction H est complètement monotone et donc linéairement séparable lorsque le nombre de ses variables est inférieur à 9.

I. 3. 1. Interprétation de la Propriété 2

A partir de la fonction $F_o(x_1, \ldots, x_n) = F_1 \vee \overline{F_2}\ F_3$ non linéairement séparable, il a été possible de définir une fonction H de n+1 variables qui soit linéairement séparable.

(19) $H = F_1 \vee y . F_3$ avec $y = \overline{F_2}$

D'autre part, la propriété 1 permet de définir deux autres fonctions à seuil de n + 1 variables qui soient identiques à la fonction $F_o$ pour les sommets où $y_1$, $y_2$ sont définis.

(20) $H_1 (x_1, \ldots, x_n, y_1) = F_1 \vee y_1$ où $y_1 = \overline{F_2}\ F_3$

(21) $H_2 (x_1, \ldots, x_n, y_2) = y_2 . F_3$ où $y_2 = F_1 \vee \overline{F_2}$

Ces résultats sont résumés sur la table III. 3. en fonction des quatre catégories de points définies par les fonctions $F_1$, $F_2$, $F_3$ où $y = \overline{F_2}$

| | $F_o$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $y_1$ | $y_2$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | + | + | + | + | - | + | - |
| $A_2$ | - | - | + | + | - | - | - |
| $A_3$ | + | - | - | + | + | + | + |
| $A_4$ | - | - | - | - | - | + | + |

Table III. 3.

## II. DIFFERENTS TYPES DE RESEAUX

### II. 1. Réseaux à deux niveaux

Ce type de réseau se déduit immédiatement des décompositions de la forme I et I', définie au chapitre précédent.

$$I \qquad F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$$

$$I' \qquad F_o = G'_1 \cdot G'_2 \cdot \ldots \cdot G'_{p'}$$

La configuration du réseau est représentée sur la Figure III. 1.

L'élément de sortie réalise soit la fonction logique OU des variables $y_1, \ldots, y_p$ avec $y_i = G_i$ ; ou bien la fonction logique ET des variables $y'_1, \ldots, y'_{p'}$, avec $y'_i = G'_i$.

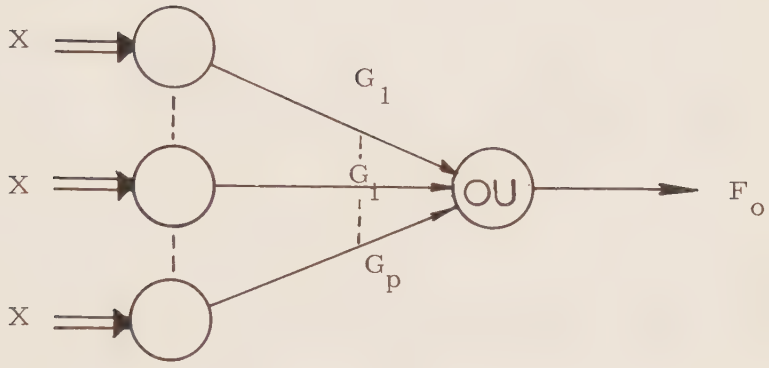



Figure III. 1.

Exemple

$$F_o = F(P_o, P_5, P_6, P_7) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_3$$

$$F_o = G_1(0) \vee G_2(5, 6, 7)$$

Cette fonction est réalisée par le réseau de la Figure III. 2.

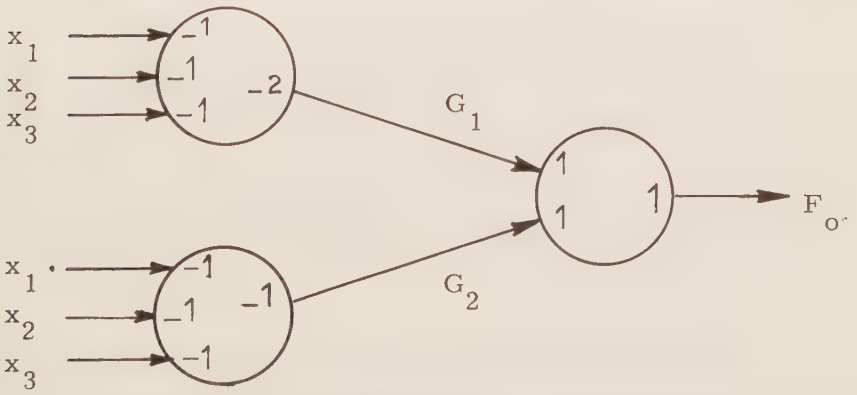



Figure III. 2.

Le réseau obtenu est analogue à celui obtenu à partir de la forme booléenne normale disjonctive (somme de produits), ou conjonctive (produit de sommes) et à l'aide des opérateurs ET, OU et complémentation.

Cependant les opérateurs à seuil permettent de réaliser directement certaines fonctions que les opérateurs classiques ne fournissent pas. C'est le cas pour la fonction $G_2 = x_1 x_3 \vee x_2 x_3$.

L'intérêt de ce réseau est de ne comporter que deux couches logiques et donc de présenter un temps de réponse avantageux.

Son inconvénient majeur est le nombre d'entrées éventuellement élevé de l'élément de sortie. Ce nombre atteint la valeur maximum de $2^{n-1}$ dans le cas de la fonction parité de n variables.

## II.2. Réseau en cascade simple

Nous dirons qu'un réseau présente une structure en cascade simple, lorsque chaque couche logique ne comporte qu'un seul élément, et que la sortie de l'élément d'un niveau donné, constitue une entrée supplémentaire pour l'élément placé immédiatement en aval (Figure III.3.).

Chaque élément à seuil comporte alors soit n ou (n + 1) entrées ; les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant appliquées à chacun d'eux.

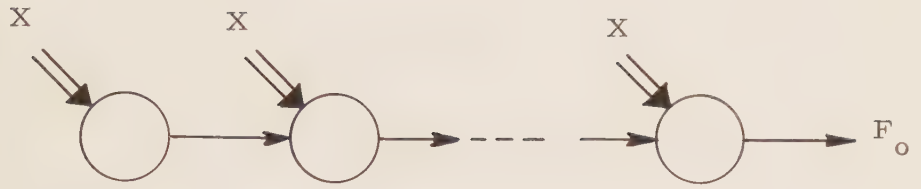



Figure III. 3.

Un tel réseau se déduit directement des formes 1 et 1', à l'aide de la Propriété 1.

Les fonctions logiques suivantes seront définies :

$$y_1 = G_1 \qquad y'_1 = G'_1$$

$$y_2 = y_1 \vee G_2 \qquad y'_2 = y'_1 \cdot G'_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_i = y_{i-1} \vee G_i \qquad y'_i = y'_{i-1} \cdot G'_i$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

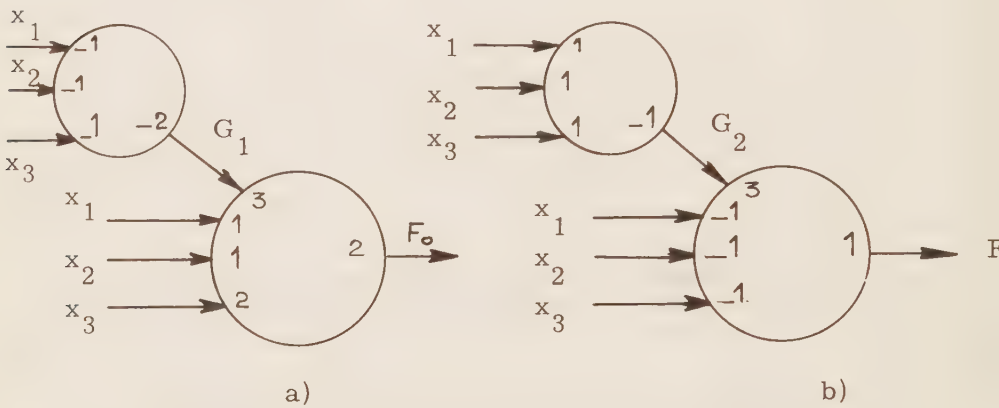
$$F_o = y_p = y_{p-1} \vee G_p \qquad F_o = y'_{p'} = y'_{p'-1} \cdot G'_{p'}$$

Exemple

Le réseau en cascade simple qui correspond à la fonction $F_o = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$ est représenté Figure III. 4.

Il est à noter que l'ordre dans lequel sont réalisées les différentes fonctions $G_i$ conduit à des valeurs de poids différentes. Dans cet exemple, le réseau de la Figure III. 4. b est plus intéres-

sant : la somme des valeurs absolues des poids égale à 7, est plus faible, pour le second élément à seuil que pour la réalisation de la Figure III. 4. a où elle est égale à 9.




a) b)

Figure III. 4.

$G_1 = F(0)$

$G_2 = F(5, 6, 7)$

II. 3. Réseau avec l'opérateur U

L'opérateur U, par définition, réalise la fonction à seuil suivante, de trois variables :

$$U = F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 \qquad (22)$$

dont la réalisation $\underline{W}^*$ est :

$$\underline{W}^T = (1 ; 2, -1, 1) \qquad (23)$$

L'obtention du réseau représenté Figure III. 5. fait appel à la décomposition du type II.

Les opérateurs U seront utilisés pour fournir successivement les fonctions suivantes :

$$y_1 = F_1 \vee \overline{F_2}\, F_3$$

$$y_2 = y_1 \vee \overline{F_4}\, F_5$$

$$\vdots$$

$$F_o = y_q = y_{q-1} \vee \overline{F_{2q}}\, F_{2q+1}$$

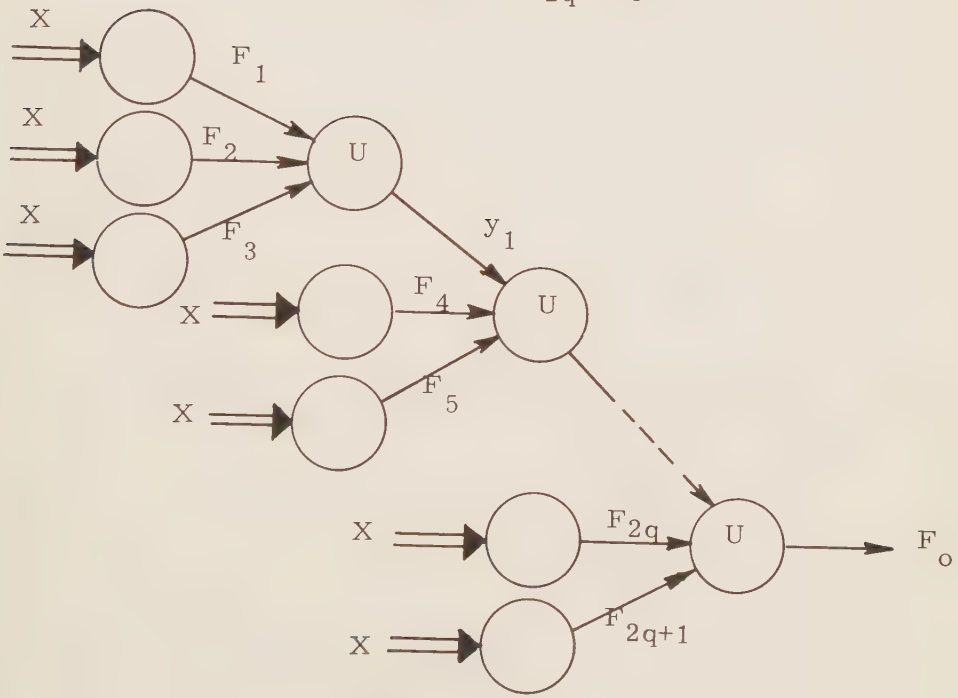
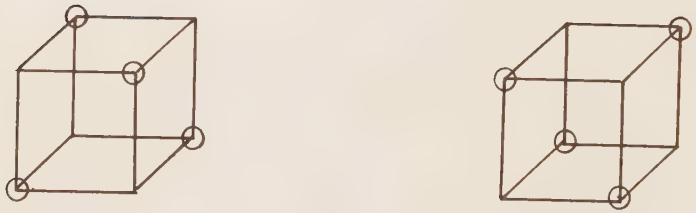



Figure III. 5.

Exemple

Soit la fonction parité de quatre variables Figure III. 6.



FigureIII. 6.

$$F_o = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$$
$$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$F_o = F\ (0,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15)$$

Cette fonction peut se décomposer de la façon suivante :

$$F_o = F_1 \vee \overline{F}_2 F_3 \vee \overline{F}_4 F_5$$

avec

$F_1 = F\ (0)$

$F_2 = F\ (0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8)$

$F_3 = F\ (0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12)$

$\overline{F}_4 = F\ (15)$

$F_5 = 1$

Compte tenu des symétries de la fonction parité, quelle que soit la fonction $F_1$, le résultat sera équivalent.

La réalisation correspondante est représentée Figure III. 7. a. Cette première réalisation peut être simplifiée, compte tenu du fait que la fonction de quatre variables

$$F = y_1 \vee \overline{y_2}\, y_3 \vee y_4$$

est linéairement séparable. Ceci conduit à la réalisation de la Figure III. 7. b.

Le réseau final d'éléments à seuil permet donc la réalisation de la fonction parité de quatre variables, à l'aide de cinq éléments à seuil à quatre entrées, avec deux niveaux d'éléments.

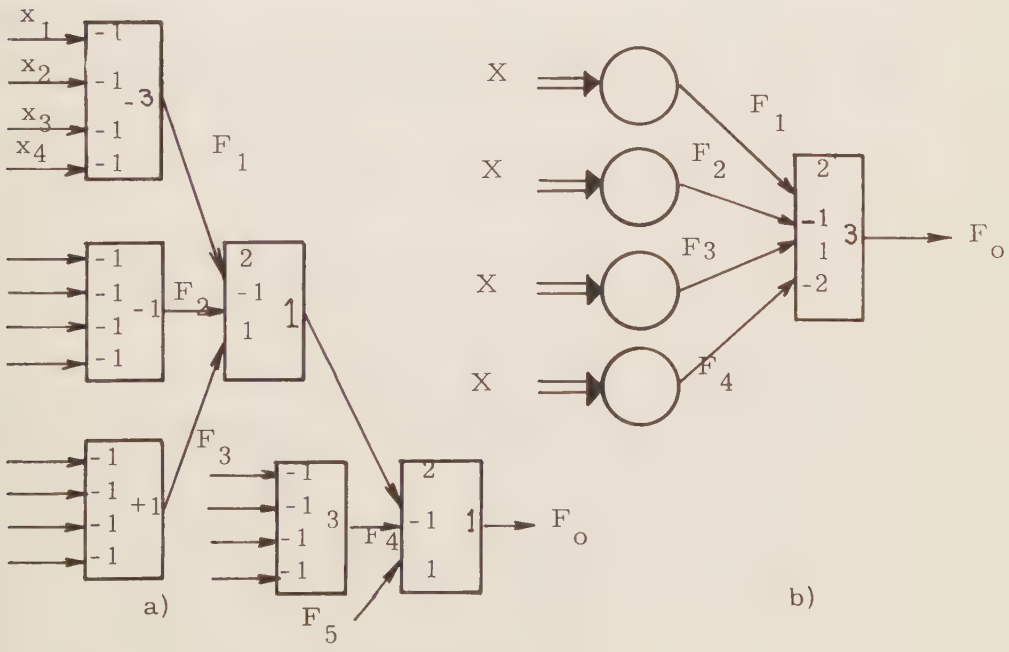



Figure III. 7.

La modification de l'étage de sortie, illustrée par l'exemple précédent, reste toujours possible dans le cas où :

$$F_{2q+1} = 1 \qquad (24)$$

Alors

$$F_o = y_{q-2} \vee \overline{F}_{2q-2} \cdot F_{2q-1} \vee \overline{F}_{2q} \qquad (25)$$

et le module de sortie réalisera directement la fonction de quatre variables $F = y_1 \vee \overline{y_2}\, y_3 \vee \overline{y_4}$.

II. 4 Réseau à trois couches

A partir d'une décomposition du type 2, et compte tenu de la Propriété 1, les fonctions telles que $H_i$

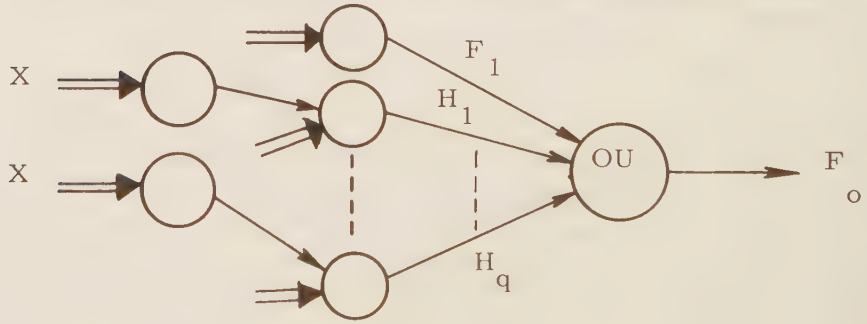
$$H_i = \overline{F}_{2i} \cdot F_{2i+1} \qquad (26)$$

peuvent être réalisées à l'aide de deux éléments à seuil disposés en série. Le premier élément réalise la fonction $y = \overline{F}_{2i}$

Dans ce cas, la fonction $F_o$ s'écrit

$$F_o = F_1 \vee H_1 \vee \ldots \vee H_q \qquad (27)$$

Le réseau correspondant est représenté Figure III. 8.



II. 5. Exemple de décomposition

Soit la fonction (Figure III. 9.)

$$F_o = \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4$$

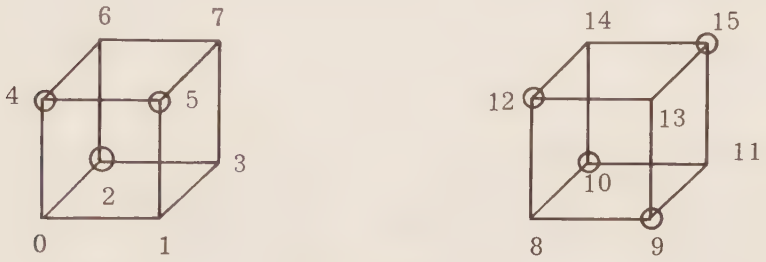



Figure III. 9.

La décomposition du type I conduit à :

$$F_o = G_1 \vee G_2 \vee G_3 \vee G_4$$

avec

$G_1 = F(4, 5, 12) = \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3$ réalisée par (-3; -1, -2, 2, -1)

$G_2 = F(2, 10) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$ réalisée par (-2; -1, 1, -1, 0)

$G_3 = F(9) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4$ réalisée par (-3; 1, -1, -1, 1)

$G_4 = F(15) = x_1 x_2 x_3 x_4$ réalisée par (-3; 1, 1, 1, 1)

A partir de chaque fonction $G_i$, $i = 1, \ldots, 4$ il est possible de déterminer les décompositions du type II suivantes :

a) $F_1^a \equiv G_1$

$F_2^a = F\ (0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14)$
dont la réalisation est $\underline{W}^T = (1;-1, -2, 2, -1)$

$F_3^a = \overline{F}\ (3, 11)$ $\qquad \underline{W}^T = (2;-1, -1, -1, 0)$

b) $F_1^b \equiv G_2$

$F_2^b = F\ (0, 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 14)$ $\qquad \underline{W}^T = (+1;-1, 2, -2, -1)$

$F_3^b = \overline{F}\ (13)$ $\qquad \underline{W}^T = (3;-1, +1, -1, -1)$

c) $F_1^c \equiv G_3$

$F_2^c = F\ (0, 1, 3, 8, 9, 11, 13)$ $\qquad \underline{W}^T = (-1;2, -2, -3, 1)$

$F_3^c = \overline{F}\ (6, 7, 14)$ $\qquad \underline{W}^T = (3;1, -2, -2, 1)$

d) $F_1^d \equiv G_4$

$F_2^d = F\ (3, 6, 7, 11, 13, 14, 15)$ $\qquad \underline{W}^T = (-1;2, 3, 2, 1)$

$F_3^d = \overline{F}\ (0, 1, 8)$ $\qquad \underline{W}^T = (3;\ 1, 2, 2, 1)$

La Figure III. 10. reprend les différentes fonctions $F_i$ ainsi obtenues.

Les notations sont les suivantes :

Un sommet marqué ● appartient à $F_1$, O à $\overline{F}_1 F_2$ X à $\overline{F}_2\ F_3$

Chacune de ces décompositions conduit donc à une réalisation de la fonction, à l'aide d'un circuit qui comporte deux éléments à seuil où le premier des éléments réalise une des fonctions $F_2$, ci-dessus définies.

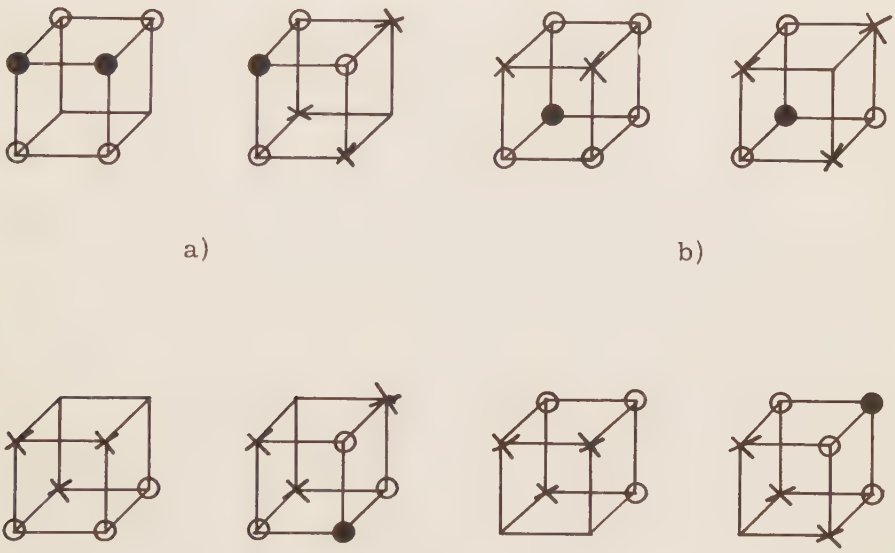



Figure III. 10

Si la même procédure est appliquée à la fonction complémentée $\overline{F}_o$, les résultats suivants sont obtenus :

La table de la Figure III. 11 fournit les fonctions linéairement séparables qui sont inclues dans $F_o$.

| $\overline{F}_o$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 7 | 8 | 11 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $G_5$ | x | x | | | | x | | | |
| $G_6$ | | | | x | x | | | | x |
| $G_7$ | | | | | | | | x | |
| $G_8$ | x | x | x | | | | | | |
| $G_9$ | | | x | x | x | | | | |
| $G_{10}$ | | x | x | | x | | x | | |

Figure III. 11

Pour les trois premières de ces fonctions, on retrouve l'une des décompositions précédentes.

En effet, comme $G_5 = \overline{F}^d_3$

$$\overline{F}_o = \overline{F}^d_3 \vee F^d_2 . \overline{F}^d_1$$

de même :

$G_6 = \overline{F}^c_3$ d'où $\overline{F}_o = \overline{F}^c_3 \vee F^c_2 . \overline{F}^c_1$

$G_7 = \overline{F}^b_3$ d'où $\overline{F}_o = \overline{F}^b_3 \vee F^b_2 \overline{F}^b_1$

Pour les deux fonctions $G_8$, $G_9$, on aboutit à des décompositions plus complexes du type :

$$\overline{F}_o = F_1 \vee \overline{F}_2 F_3 \vee \overline{F}_4 F_5$$

e) $F^e_1 = G_8 = F(0, 1, 3)$

$F^e_2 = F^e_1 \vee F(2, 4, 5, 9)$

$F^e_3 = F^e_2 \vee F(6, 7, 8, 11, 13)$

$F^e_4 = F^e_3 \vee F(10, 12, 15)$

$F^e_5 = F^e_4 \vee F(14) \equiv 1$

f) $F^f_1 = G_9 = F(3, 6, 7)$

$F^f_2 = F^f_1 \vee F(2, 4, 5, 15)$

$F^f_3 = F^f_2 \vee F(0, 1, 11, 13, 14)$

$F^f_4 = F^f_3 \vee F(9, 10, 12)$

$F^f_5 = F^f_4 \vee F(8) \equiv 1$

La dernière fonction considérée $G_{10}$ conduit à une décomposition en trois fonctions à seuil :

g) $F^g_1 = G_{10} = F(1, 3, 7, 11)$

$F^g_2 = F^g_1 \vee F(2, 5, 9, 10, 15)$

$F^g_3 = F^g_2 \vee F(O, 6, 8, 13, 14)$

Ces trois derniers résultats sont représentés

**Figure III. 12**

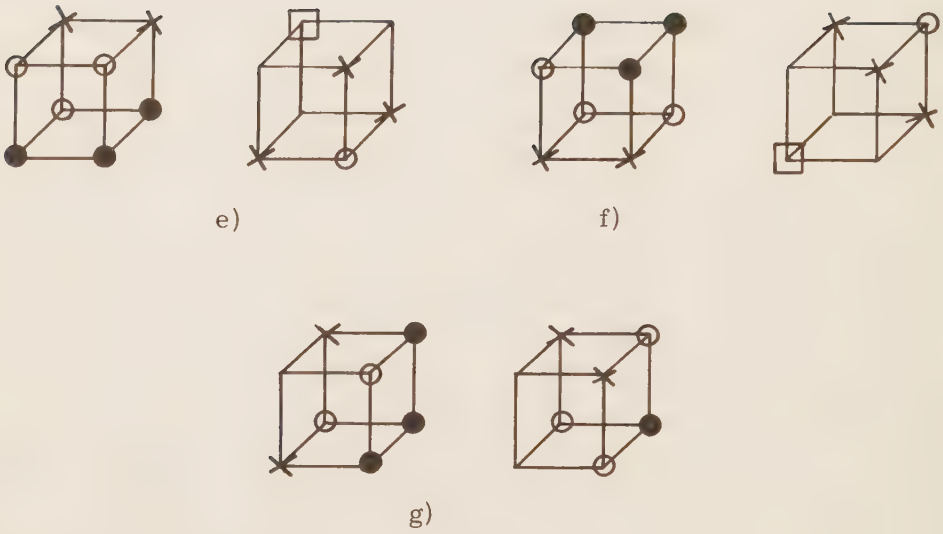



Figure III. 12

Un sommet marqué ● appartient à $F_1$, ○ à $F_1 F_2$, ✕ à $F_2 F_3$, □ à $F_4 F_5$

Cet exemple met en évidence l'efficacité de la méthode en ce qui concerne la décomposition de toute fonction logique en fonctions linéairement séparables. Cependant ces décompositions ne conduisent pas toutes à une décomposition minimale par rapport aux nombres de fonctions (cas e et f). On peut remarquer, en outre, que la réalisation de cette fonction proposée par Hopcroft [6] est identique à celle obtenue en c. Cette réalisation est représentée Figure III. 13

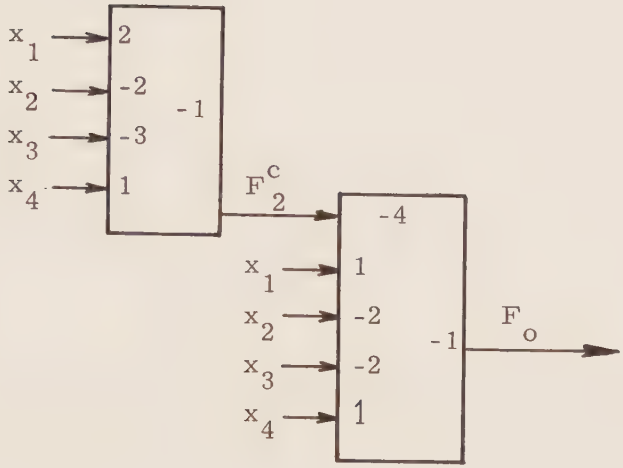



Figure III. 13

Remarque

La recherche de la réalisation $\underline{W}^*$ d'une fonction $F_i$ peut s'effectuer simplement à l'aide de la table de correspondance entre le vecteur caractéristique et la réalisation optimale de la fonction.

## III. CONCLUSION DU CHAPITRE III

Le choix d'un réseau qui réalise une fonction logique donnée, comportera les étapes suivantes :

1) La fonction est-elle réalisable par un seul élément à seuil ? Pour répondre, la forme normale du vecteur caractéristique est déterminée pour être comparée à la liste des formes normales des fonctions linéairement séparables.

2) Si la fonction n'est pas linéairement séparable, une décomposition du type I, somme de fonctions à seuil, sera recherchée. A ce niveau, une borne supérieure au nombre d'éléments à seuil nécessaire est obtenue.

3) Les décompositions du type II seront déterminées. Une telle décomposition est associée à chaque fonction $G_i$ déterminée en 2. La décomposition qui comporte le plus petit nombre de fonctions sera retenue.

# CONCLUSION

L'objectif principal de cette étude a été de mettre au point une méthode systématique de décomposition d'une fonction logique quelconque $F_o$ en fonctions logiques linéairement séparables. Cet objectif a été atteint par une méthode originale qui utilise la notion de matrice limite associée à une fonction à seuil.

Cette méthode est générale et systématique et ne requiert aucune intuition heuristique. Elle reste économique par rapport au nombre de modules à seuil nécessaire pour la synthèse et demande un volume de calcul limité. D'autre part, dans le cas d'un nombre de variables inférieur ou égal à cinq, le problème peut être traité à la main, dans la mesure où une première décomposition semi-optimale est recherchée.

Les deux formes de décomposition suivantes ont été obtenues :

$$F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots, \vee G_p$$
$$F_o = F_1 \vee \overline{F}_2 F_3 \vee \ldots \vee \overline{F}_{2q} F_{2q+1}$$

Dans le cas de fonctions logiques complètement spécifiées de sept variables au plus, la mise en évidence d'une propriété caractéristique de la réalisation optimale d'une fonction à seuil

a permis la détermination de ces décompositions : si $\underline{W}^*$ est la réalisation optimale d'une fonction logique à seuil F et M, la matrice limite de cette fonction F, alors :

$$\underline{W}^{*T} \quad M = \underline{e}^T$$

Cette propriété conduit à la construction d'une suite croissante de fonctions logiques linéairement séparables, adjacentes deux à deux. Cette suite de fonctions déterminera les différentes fonctions à seuil des deux décompositions ci-dessus. Diverses procédures de calcul, basées sur cette propriété, ont été développées, avec la démonstration de leur convergence.

Il est alors possible d'associer à ces décompositions des réseaux d'éléments à seuil, des structures diverses qui permettent dans une certaine mesure de s'adapter aux contraintes technologiques. Ces réseaux sont basés sur les propriétés de composition des fonctions à seuil entre elles.

Un développement utile de ce mémoire consisterait à analyser les modifications à apporter à la méthode proposée pour différents cas :

. fonctions logiques incomplètement spécifiées
. fonctions simultanées
. modules logiques à nombre d'entrées limitées.

Compte tenu des caractéristiques des procédures élaborées - manière progressive de considérer chaque sommet d'une fonction, possibilité de décompositions différentes - l'approche présentée dans ce mémoire devrait pouvoir être étendue aux problèmes ci-dessus.

Par ailleurs, il semble que le problème de la détection et de la localisation de pannes dans des circuits constitués d'éléments à seuil, celui de la maintenance de tels circuits en général, présente des aspects spécifiques. Il faut noter, de ce point de vue, le rôle privilégié que jouent les combinaisons des variables qui correspondent aux colonnes de la matrice limite, rôle qui demeure dans le cas des modules classiques qui réalisent des fonctions à seuil.

Enfin, la conception de circuits séquentiels en vue de leur réalisation à l'aide d'éléments à seuil constitue un thème abordé par certains chercheurs [16] , ainsi qu'au Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales.

Toutefois, l'extension des applications de la logique à seuil reste subordonnée aux développements de la technologie des éléments à seuil [13] . D'ores et déjà, divers types de portes logiques à seuil sont développées [14] .Le groupe Composants du Laboratoire d'Automatique et de ses Applications Spatiales étudie actuellement la faisabilité d'un module logique à seuil qui utiliserait la technologie des transistors à grille isolée.

La conception et l'optimisation de circuits logiques conventionnels présentent des domaines où les résultats qui concernent la logique à seuil, sont susceptibles d'applications intéressantes [15 - 17]. La démarche fondamentale de cette approche consiste à associer à tout module classique le système d'inégalités linéaires qui traduit son fonctionnement en tant qu'élément à seuil. Le problème est alors celui des performances des méthodes de résolution d'un système d'inégalités linéaires dont les inconnues sont bivalentes.

# BIBLIOGRAPHIE

[1] R.O. WINDER
The Status of Threshold Logic.
R.C.A. Review, March 1969, pp. 62-84.

[2] C.H. MAYS
The Boundary Matrix of Threshold Functions.
IEEE Transactions on Electronic Computers, vol. 14
February 1965, p. 65.

Adaptive Threshold Logic
Technical Report n° 1557-1, Stanford University, April 1963.

[3] G.F. HUGUES
A Threshold Gate Feed forward Switching Net Algorithm.
California Institute of Technology, Ph.D. 1964.
(University Microfilms, order n° 65 6525).

[4] D. GALE
Theory of Linear Economic Models.
McGraw Hill, 1960.

[5] R.O. WINDER
Threshold Logic
Princeton University, Ph.D. 1962

[6] J.E. HOPCROFT
Synthesis of Threshold Logic Networks.
Stanford University, Ph.D. 1964.
(University Microfilms, order n° 64 13595).

[7] M. L. DERTOUZOS
Threshold Logic : a Synthesis Approach.
M.I.T. Press, 1965.

[8] S. YAJIMA - T. IBARAKI
A Theory of Completely Monotonic Functions and its Application to Threshold Logic.
IEEE Transactions on Computers, vol. C-17, n° 3 March 1968, pp. 214-229.

Realization of Arbitrary Logic Functions by Completely Monotonic Functions and its Application to Threshold Logic.
IEEE Transactions on Computers, vol. C-17, n° 4, April 1968, pp. 338-351.

[9] S. MUROGA
Generation and Asymmetry of Self-Dual Threshold Functions.
IEEE Transactions on Electronic Computers, vol. 14, April 1965, pp. 125-136.

[10] K. FAN
On Systems of Linear Inequalities in "Linear Inequalities and Related Systems".
H.W. KUHN - A. W. TUCKER
Princeton University Press, 1956.

[11] P. AZEMA
Différence booléenne d'une fonction logique monotone.
C.R.A.S. Paris, t; 268 (14 janvier 1969), Série A, p. 473

Propriétés de la matrice limite associée à une fonction logique linéairement séparable.
C.R.A.S. Paris, t. 269, (7 juillet 1969), Série A, p.166

Synthèse de fonctions logiques à l'aide d'éléments à seüil.
Colloque international "Systèmes Logiques : conception et applications", Bruxelles, 15-20 Septembre 1969.
Edit. Université Libre de Bruxelles.

[12] S. MUROGA - T. TSU BOI - C.R. BAUGH
Enumeration of Threshold Functions of Eight Variables
Report n° 245 - P.B. 111.451 - Aout 1967.

[13] R.O. WINDER
Threshold Logic will Cut Cost Especially with Boost from L.S.I.
Electronics, vol. 41 n° 11, May 27, 1968, p. 94

[14] S. COHEN - R.O. WINDER
Threshold Gate Building Blocks
IEEE Transactions on Computers, vol. C-18, n° 9, September 1969, p. 816-823

[15] S. MUROGA - T. IBARAKI
Logical Design of an Optimal Network by Interger Linear Programming.
Report n° 68-212, Illinois University - Urbana, July 68

[16] F.O. HADLOCK - C.L. COATES
Realization of Sequential Machines with Threshold Elements.
IEEE Transactions on Computers, vol. C-18, n° 5, May 1969, p. 428

[17] P. AZEMA - J.C. IPPOLITO
Etude d'un système logique à l'aide de sa caractérisation par un système d'inégalités linéaires.
Congrès Informatique AFCET, Paris, Septembre 1970.
Edit. AFCET

[18] S. MUROGA - T. TSU BOI - C.R. BAUGH
Enumeration of Threshold Functions of Eight Variables
IEEE Transactions on Computers, vol. 19, n° 9, September 1970, p. 818.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : PROPRIETES DES FONCTIONS LOGIQUES LINEAIREMENT SEPARABLES

I. Définitions et Notations 13
I. 1. Fonction Logique linéairement séparable ou fonction à seuil 13
I. 2. Différentes représentations d'une fonction logique 16
I. 3. Matrice associée à une fonction logique linéairement séparable 18

II. Propriétés des fonctions logiques linéairement séparables 19
II. 1. Monotonicité 19
II. 1. 1. Définition
II. 1. 2. Propriétés de monotonicité 22
II. 1. 3. Tests de monotonicité 23
II. 1. 3. 1. Utilisation du tableau de VEITCH
II. 1. 3. 2. Test Algébrique

II. 2. Sommabilité 26
II. 2. 1. Définition 27
II. 2. 2. Test de sommabilité 30

II. 3. Vecteur caractéristique 32
II. 3. 1. Définition 32
II. 3. 2. Propriétés 34
II. 3. 3. Classe d'équivalence des fonctions à seuil 35

II. 4. Matrice limite d'une fonction à seuil 36
II. 4. 1. Définition 37
II. 4. 2. Propriétés 37
II. 4. 3. Interprétation géométrique 42

III. Conclusion du Chapitre I 43

CHAPITRE 2 : DECOMPOSITION D'UNE FONCTION LOGIQUE EN FONCTIONS LINEAIREMENT SEPARABLES 45

I. Enumération des classes d'équivalence des fonctions à seuil 51
I. 1. Principe de la méthode 51
I. 2. Mise en oeuvre de la méthode 54
I. 3. Propriété de la réalisation optimale 60

II. Décomposition d'une fonction logique en sous-fonctions linéairement séparables 62
II. 1. Détermination de la forme I
$F_o = G_1 \vee G_2 \vee \ldots \vee G_p$ 63
II. 2. Détermination de la forme I' 69
II. 3. Interprétation géométrique 69
II. 4. Réduction du nombre de sous-fonctions 71
II. 5. Minimisation du nombre de sous-fonctions 73
II. 6. Détermination de la forme II
$F_o = F_1 \vee \bar{F}_2 F_3 \vee \ldots \vee \bar{F}_{2q} F_{2q+1}$ 77

III. Conclusion du Chapitre II. 85

CHAPITRE 3 : RESEAUX D'ELEMENTS A SEUIL 87

I. Propriétés de composition 92
I. 1. Propriété 1 92
I. 2. Propriété 2 96
I. 3. Interprétation de la Propriété 2 97

II. Différents types de réseau 98
II. 1. Réseau à deux niveaux 98
II. 2. Réseau en cascade simple 100
II. 3. Réseau avec l'opérateur U 102
II. 4. Réseau à trois couches 106
II. 5. Exemple de décomposition 107
III. Conclusion du Chapitre III 114

CONCLUSION 115

BIBLIOGRAPHIE 121

-:-

Pierre, Paul AZEMA est né le 8 Février 1940 à Toulouse. Il est ingénieur diplômé de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique et d'Hydraulique de Toulouse (promotion 1963), licencié ès-Sciences Physiques de la Faculté des Sciences de Toulouse. Il reçoit le grade de Docteur-Ingénieur le 3 Novembre 1965. Depuis le 1er Janvier 1966, il est chercheur au Centre National de la Recherche Scientifique, actuellement Chargé de Recherche.

Marié, deux enfants.

Autorisation de soutenance
accordée.
TOULOUSE, le 10 NOV. 1970

P/Le Président :
*Le Vice-Président,*

F. MATHIS